أسس وقواعد المعادلات في تبسيط علوم فيزياء الرياضيات

د . يحيى حمدي محمد البشار





الطبعة الأولى
مايو 2021

أسس و قواعد المعادلات
في تبسيط علوم فيزياء الرياضيات

إعداد و تأليف

د / على عبدالله سعيد عبدالله　　　　د/ يحيى حمدى محمد البشار

□

أسس و قواعد المعادلات

في تبسيط علوم فيزياء الرياضيات

د / على عبدالله سعيد عبدالله

د/ يحيى حمدى محمد البشار

الناشر :دار الربيع للنشر والتوزيع

تصميم وإخراج داخلي: دار الربيع

رقم الإيداع بدار الكتب والوثائق القومية

2021/15092

الترقيم الدولي

978/977-90-9113-6

تقديم

تواجه المكتبة العربية فقراً فى عدد الكتب العملية بلغتنا العربية ناهيك عن أن الجامعات فى الكثير من البلدان العربية تقوم بتدريس العلوم باللغات الأجنبية مما يعيق حركت التقدم العلمى فالباحثين والطلاب على حد سواء يواجهون مشكلة التعامل مع المراجع العلمية باللغات الأجنبية. نحن أمة العرب من صدرنا العلوم لبلاد الغرب فحرينا بنا أن نبنى صرحاً من الكتب العملية باللغة العربية. ومما لا شك ان علم فيزياء الرياضيات هو أحد أهم الركائز التى تبنى عليها العلوم المختلفة ، لذلك حاولنا ووفقنا الله في جمع أكبر قدر من الامكان لمعادلات الفيزياء الرياضية التي قد تساعد اي طالب في جميع المستويات الدراسية أو باحث في جميع المستويات العلمية و يحتاج للبحث أو المراجعة لأهم معادلات الفيزياء الرياضية في كتاب واحد باللغة العربية ، و نأمل ان يساعد هذا الكتاب في تبسيط علوم فيزياء الرياضيات لسهولة سرده و تعدد موضوعاته و لشموليته فى هذا العلم الشيق. يعد الكتاب بداية لسلسة من الكتب العلمية المؤلفة باللغة العربى والتى سترتكز فى جميع أصدارتها على علم الفيزياء بمختلف فروعه.

د / على عبدالله سعيد عبدالله

د/ يحيى حمدى محمد البشار

المحتويات

الباب الأول

المجموعات ومنظومة الأعداد

الباب الأول

المجموعات ومنظومة الأعداد

1.1) المجموعات

يعد مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية فى علم الرياضيات فلقد أصبح مفهوم المجموعات من معالم الرياضيات البارزه. ولقد كان لمفهوم المجموعات الأثر الأكبر فى مختلف فروع الرياضيات بالإضافة إلى أثرها الواضح فى شتى العلوم الأخرى.

1) مفهوم المجموعة

المجموعة هى كل تجمع معرف تعريفاً تاماً من عناصر متمايزة عن بعضها وتكتب عناصر المجموعة فى قوسين على الصورة { }. فعلى سبيل المثال مجموعة أعداد أيام الإسبوع ومجموعة الأعداد {2,5,7,9}. وعلى النقيض فلا تمثل التجماعات الغير محددة كسرب الطيور أو مجموعة الزهور فى باقة ورد مجموعات حيث أنها ليست معرفة تعريفا تاماً ومحدداً.

مثال (1): أي من العبارات التالية تدل على مجموعة ، مع ذكر السبب ، وذكر عناصر المجموعة ؟

1) الطلبة الأذكياء في فصلك.
2) الحروف التي تكون كلمة (مسمار).
3) الرجال الشجعان.
4) مجموعة الرقم (12378).

الحل :

1) ليست مجموعة لأن لايوجد لها عناصر محددة.

2) تمثل مجموعة لأنها تتكون من عناصر محددة تحديدا تاما وعناصرها {م، س، م، ا، ر }.

3) لاتمثل مجموعة لأن عناصرها غير محددة تحديدا تاماً.

4) تمثل مجموعة ، لأن عناصرها محددة تحديدا تاما ، وعناصرها { 1، 2، 3،7، 8 }.

2) طرق كتابة المجموعات

يعبر عن المجموعات بعد طرق مختلفة وبيانها كما يلى

أ) طريقة السرد

وفى تلك الطريقة يتم التعبيرعن المجموعة بكتابة عناصرها كاملة وذلك إذا كان عددها قليلاً نسبياً وفي هذه الطريقة يجب أن تتوفر الشروط الآتية:

أ) تكتب العناصر داخل حاصرتين { }.

ب) وضع فاصلة بين كل عنصر وآخر.

ج) ليس من الضروري الترتيب.

د) عدم تكرار عناصر.

مثال (2):

أكتب المجموعات التالية بطريقة السرد

أ) مجموعة الأعداد الفردية من الواحد وحتى التسعة

ب) مجموعة أرقام العدد 7755909.

الحل :

أ)

$$X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

ب)

$$Y = \{9, 0, 5, 7, \}$$

ويلاحظ هنا أنه لا بد من عدم تكرار الأعداد (5،7،9) كما ذكر أنفاً فى فى شروط كتابة المجموعة بطريقة السرد.

ب) الصفة المميزة

وذلك عن طريق التعبير عن المجموعة بصفة مشتركة فيما بينها

مثال (3): أكتب المجموعات الآتية بذكر الصفة المميزة لكلاً منها.

أ)

$$X = \{2, 4, 6\}$$

ب)

$Y =$ { السبت، الأحد ، الأثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس، الجمعة}

الحل :

أ) المجموعة X مكتوبة بطريقة السرد ونكتبها بالصفة المميزة بأنها مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة ما بين 1، 7 أو نكتبها رمزياً على الصورة

$$X = \{A: A(\text{عددا زوجياً}), 1 < A < 7\}$$

ونقرأها X مجموعة الأعداد A، حيث A عدد زوجي محصور بين 1 و7 والرمز (:) يُقراء ‹‹ حيث ››.

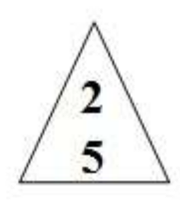
ب)

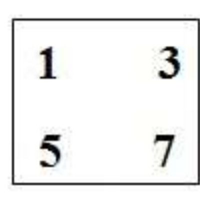
المجموعة Y نكتبها بطريقة الصفة المميزة على أنها تُمثل مجموعة أيام الأسبوع أو رمزياً

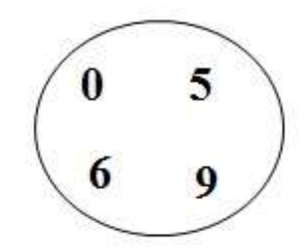
$$Y = \{A: A \text{ أحد أيام الإسبوع}\}$$

ج) أشكال فن

تعد أشكال فن أحد طرق كتابة المجموعات وذلك بكتابة العناصر داخل شكل منحنى مغلق كما يلى







3) المجموعات المنتهية و المجموعات الغير منتيهة

أ) المجموعة المنتهية

إذا أمكن حصر عدد عناصر المجموعة سميت مجموعة منتهية ومثال لذلك

1- مجموعة العوامل الأولية للعدد 12
2- مجموعة الأعداد الطبيعة الأقل من 7

ب) المجموعة الغير منتهية

المجموعة الغير منتهية هى تلك المجموعة التى لا يمكن حصر عناصرها ومثال ذلك

1- مجموعة مضاعفات العدد 3
2- مجموعة مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من -3

4) المجموعة الخالية

إذا لم تحتوى المجموعة على أى عناصر سميت بالمجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز(ϕ)
ومن الأمثلة على مجموعة الأعداد الخالية

1- مجموعة الدول العربية الواقعة فى أوربا
2- مجموعة الأعداد الطبعية الأصغر من الصفر

5) الإنتماء

إذا كان عنصر ما أحد عناصر مجموعة ما فإنه يقال أن هذا العنصر ينتمى إلى تلك المجموعة والعكس صحيح ويرمز للإنتماء بالرمز($\in$) أما غير الإنتماء فيرمز له بالرمز($\notin$).

مثال (4):

إذا كان لدينا مجموعة الأعداد

$$X = \{2, 4, 6, 8\}$$

فإننا نقول مثلاً أن

$$2 \in X$$

و

$$5 \notin X$$

6) المجموعة الجزئية (الإحتواء)

إذا كان كل عناصر المجموعة X ينتمى إلى مجموعة أخرى Y فإننا نقول أن X متحواه فى Y أو أن X مجموعة جزئية من Y ويرمز لها بالرمز ($\subset$).

مثال (5):

إذا كان

$$X = \{2, 3, 7\}$$

$$Y = \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

فإننا نقول أن

$$X \subset Y$$

ولكن

$$Y \not\subset X$$

وتعنى ($\not\subset$) أن Y ليست جزئية من X

مثال (6):

إذا كانت

$$X = \{1, 2, 3\}$$

فإن كل المجموعات الآتية جزئية من X

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

7) العمليات على المجموعات

أ) التقاطع

إذا كان لدينا المجموعتان X و Y فإن مجموعة العناصر المشتركة بينهما تسمى التقاطع ويعبر عن ذلك رياضياً كما يلى

$$X \cap Y$$

مثال (7):

إذا كان

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$Y = \{2, 3, 5\}$$

فإن

$$X \cap Y = \{2, 3\}$$

ب) الإتحاد

الإتحاد يعبر عن مجموعة العناصر التى تنتمى إلى كلا المجموعتين X و Y ويوصف رياضياً كالأتى

$$X \cup Y$$

ففى المثال السابق مثلا نجد أن

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$$

ويلاحظ هنا عدم تكرار العناصر فى مجموعة الإتحاد

ج) المجموعة المكملة

هى العناصر التى تنتمى الى المجموعة (X) ولا تنتمى إلى المجموعة (Y) أى إذا كان (A) و (B) مجموعاتان تحتوى كلا منهم على عدد من العناصر فإن المجموعة المكملة (A^c) هى المجموعة التى تحتوى الفرق بين المجموعتين

$$A^c = A - B = \{x: x \in A, x \notin B\}$$

مثال (8):

إذا كان

$$X = \{1, 2, 7\}$$
$$Y = \{2, 3, 5\}$$

فإن

$$X - Y = \{1.7\}$$
$$Y - X = \{3, 5\}$$

د) المجموعة الشاملة

إذا إحتوت مجموعة ما كافة المجموعات قيد الدراسة فإنها تسمى بالمجموعة الشاملة.

مثال (9):

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{2, 3, 5\}, Z = \{1, 3, 5, 7\}$$

فإن المجموعة

$$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$$

تسمى بالمجموعة الشاملة.

مثال (10): اذا كانت

$$A = \{2, 7, 8\}, \quad E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad S = \{2, 3, 5, 7\}$$

فأوجد كلا مما يلي من المجموعات الاتية :

1) المجموعة المكملة A^c من المجموعة E

2) $A \cup S$

3) $S \cap A$

الحل :

1 (

$$A^c = E - A = \{1,3,4,5,6,9\}$$

(2

$$A \cup S = \{2,3,5,7,8\}$$

(3

$$A \cap S = \{2,7\}$$

2.1) بعض العمليات الحسابية وخصائصها

1) خصائص القيمة السالبة

1. $-1(a) = -a$ 2. $-(-a) = a$ 3. $-(a+b) = -a-b$

4. $(-a)(-b) = ab$ 5. $-(a-b) = -a+b$

2) خصائص عملتى الضرب والقسمة

-1

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

-2

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

-3

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

-4

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

-5

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$$

و أخيراً إذا كان

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

فإن

$$ad=bc$$

مثال (11): إحسب ناتج ما يلى

$$\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}\div\frac{2}{1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1\times 1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}}=\frac{2}{5}\div\frac{10}{7}=\frac{2}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{2\times 10}{5\times 7}=\frac{20}{35}$$

$$\frac{5}{36}+\frac{7}{120}=\frac{5\times 120+7\times 36}{36\times 120}=\frac{600+252}{4320}=\frac{852}{4320}$$

مثال (12): إحسب ناتج ما يلى

-1

$$\frac{(7-6.35)\div 6.5+9.9}{\left(1.2\div 36+1.2\div 0.25-1\times\frac{5}{16}\right)\div\frac{169}{24}}$$

-2

$$\frac{\left(1\times\frac{1}{5}\div\left(\frac{17}{40}+0.6-0.005\right)\right)\times 1.7}{\frac{6}{5}+1\times\frac{1}{3}-1\times\frac{23}{30}}+\frac{4.75+7\times\frac{1}{2}}{33\div 4\times\frac{5}{7}}\div 0.25$$

الحل

-1

$$\frac{(7-6.35)\div 6.5+9.9}{\left(1.2\div 36+1.2\div 0.25-1\times\frac{5}{16}\right)\div\frac{169}{24}}=\frac{0.65\div 6.5+9.9}{\left(\frac{1}{30}+\frac{24}{5}+\frac{21}{16}\right)\times\frac{24}{169}}$$

$$=\frac{0.1+9.9}{\frac{169}{48}\times\frac{24}{169}}=\frac{10}{\frac{1}{2}}=20$$

-2

$$\frac{\left(1\times\frac{1}{5}\div\left(\frac{17}{40}+0.6-0.005\right)\right)\times 1.7}{\frac{6}{5}+1\times\frac{1}{3}-1\times\frac{23}{30}}+\frac{4.75+7\times\frac{1}{2}}{33\div 4\times\frac{5}{7}}\div 0.25$$

$$=\frac{\frac{6}{5}\div\left(\frac{17}{40}+\frac{3}{5}-\frac{1}{200}\right)\times\frac{17}{10}}{\frac{5}{6}+\frac{4}{3}-\frac{53}{30}}+\frac{\frac{19}{4}+\frac{15}{2}}{33\div\frac{33}{7}}\times\frac{25}{100}$$

$$=\frac{\frac{6}{5}\div\frac{51}{50}\times\frac{17}{10}}{\frac{2}{5}}+\frac{\frac{98}{8}}{7}\times 4=5+7=12$$

3) خصائص القيمة الصفرية (خصائص الصفر)

لنفرض أن (a) و (b) عددان حقيقيان فإن

1- $a + 0 = 0 + a = a$ 2- $a - 0 = a, \quad 0 - a = -a$

3- $a \times 0 = 0$ 4- $\frac{0}{a} = 0, \ \ a \neq 0$ 5- $\frac{a}{0} = \infty$

حيث يعنى الرمز (∞) ما لانهاية أى أن القيمة الناتجة غير معرفة

وإذا كان حاصل ضرب (a) و (b) مساوياً للصفره فهذا يعنى أنه إما قيمة (a) تساوى الصفر أوقيمة (b) تساوى الصفر.

3.1) الفترات

تعرف الفترة في مجموعة الاعداد الحقيقية بانها مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية R وتحدد وفقاً لشروط معينة حيث يعبر عن الفترة بقوسين يوضع داخلهما عددين أحدهم يمثل بداية الفترة والآخر يمثل نهاية الفترة وتصنف الفترات إلى ثلاث أنواع مختلفة بيانها كما يلى

1- الفترات المغلقة

وهي الفترات التي يكون عنصر البداية وعنصر النهاية ضمن عناصرها ويستخدم للتعبير عنها القوسين [ ].

والصورة العامة للفترة المغلقة هى

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b, \quad x \epsilon R\}$$

أي أنها تمثل جميع الاعداد الحقيقية الواقعة بين a ، b بما فيها a، b

2- الفترة المفتوحة

وهي الفترات التي يكون عنصر البداية وعنصر النهاية ليسا ضمن عناصرها ويستخدم للتعبير عنها القوسين (   ).

والصورة العامة للفترة المفتوحة هى

$$(a, b) = \{x: a < x < b, \quad x\epsilon R\}$$

أي أنها تمثل جميع الاعداد الحقيقية الواقعة بين a ، b بدون a ،b

3- الفترة نصف المغلقة أو نصف المفتوحة

هي الفترات التي يكون عنصر البداية ضمن عناصرها وعنصر النهاية ليس ضمن عناصرها أو العكس أي أن عنصر البداية ليس ضمن العناصر وعنصر النهاية ضمن عناصرها أو العكس.

والصورة العامة لتلك الفترة هى

$$[a, b) = \{x: a \leq x < b, \quad x\epsilon R\}$$

أي أنها تمثل جميع الاعداد الحقيقية الواقعة بين a ، b بما فيها a وليس b

أو

$$(a, b] = \{x: a < x \leq b, \quad x\epsilon R\}$$

أي أنها تمثل جميع الاعداد الحقيقية الواقعة بين a ، b بما فيها b وليس a

4.1) منظومة الأعداد

العدد هو كائن رياضي يستعمل في العد وفي القياس. ويمكن تقسيم منظومة الأعداد إلى مجموعتين رئسيتين وهما مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد التخيلية وبيانها كالآتى .

1.4.1) مجموعة الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعدادا الحقيقية (R) هى المنظومة العددية التى تحتوى جميع الأعداد الموجبة والسالبة والكسور وتغطى مدى الأعداد الذى يبداء من سالب مالانهاية وينتهى بموجب مالانهاية بالإضافة إلى الصفر. وأطلق ذلك المسمى على تلك المنظومة من الأعداد " الأعداد الحقيقية" نظراً لظهور فكرة مجموعة الأعداد التخيلية. وتحتوى مجموعة الأعداد الحقيقية على عدة مجموعات فرعية من الأعداد بيانها كالتالى

أ- **مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)** : وهى مجموعة الأعداد التى تبداء من سالب مالانهاية وحتى موجب مالانهاية بالإضافة إلى الصفر بزيادة واحد صحيح فى كل مرة.

$$Z = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ \ldots\}$$

تحتوى مجموعة الأعداد الصحيحية على مجموعة جزئية تسمى **مجموعة الأعداد الطبيعية (N)** وتعرف كالأتى :

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4 \ \ldots\}$$

أى هى مجموعة الأعداد الموجبة بالإضافة للصفر

ومما سبق يممكن أن تقول أن

$$N \subset Z \subset R$$

أى أن مجموعة الأعداد الطبيعة (N) مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة (Z) والتى تعتبر بدورها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية (R).

ب- **مجموعة الأعداد النسبية (الأعداد الكسرية) (Q) :** هى مجموعة الأعداد التى يمكن كتابتها فى صورة بسط ومقام بحيث يكون كلا من البسط والمقام عدد صحيح و لا يكون المقام مساوياً للصفر .

أى يمكننا القول بأن مجموعة الأعداد الكسرية (Q) هى مجموعة الأعداد التى يمكن وضعها على الصورة

$$Q = \frac{a}{b} \qquad b \neq 0$$

ومن أمثلة ذلك

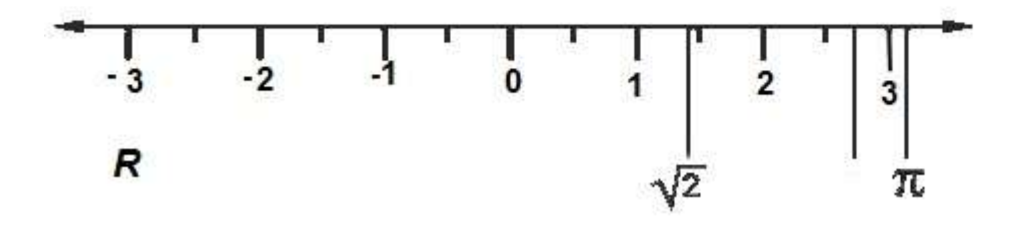
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}$$

جـ - الأعداد غير النسبية (Q') : هى مجموعة الأعداد التى لا يمكن وضعها فى صورة بسط ومقام

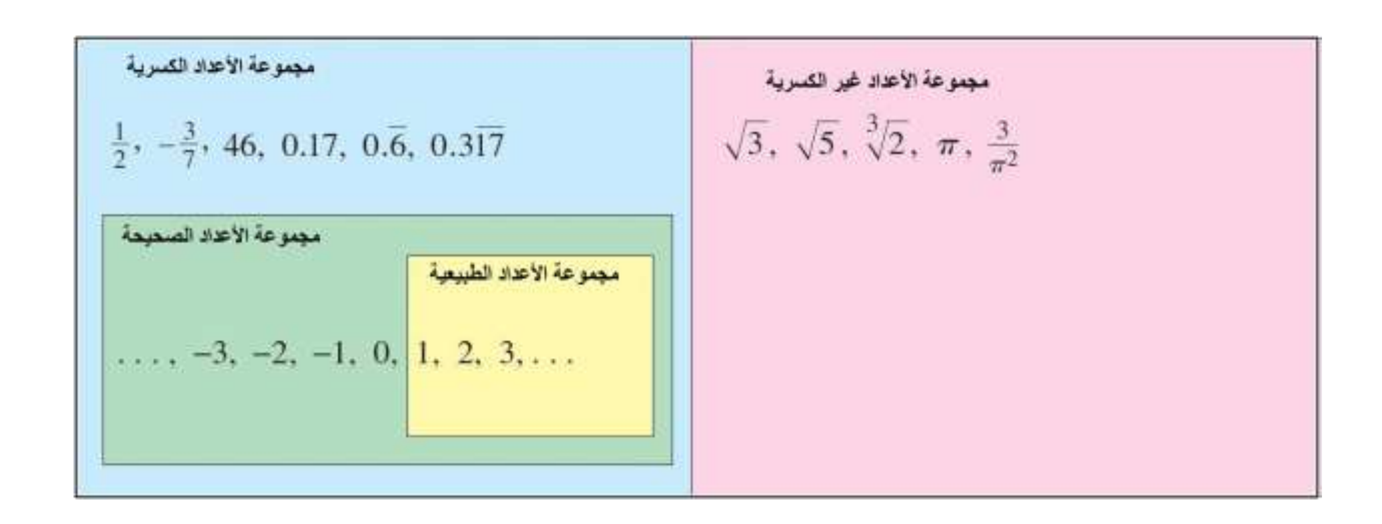
ومن أمثلة ذلك

$$\pi, \sqrt{2}, \ \sqrt{3}$$

مما سبق يتضح أن مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل منظومة غير منتهية من الأعداد وتحتوى بداخلها على عدة مجموعات جزئية وهى مجموعة الأعداد الصحيحة، ومجموعة الأعداد الكسرية و مجموعة الأعداد الغيير نسبية . ويمكن تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية بيانياًعلى أنها خط مستقيم يشمل جميع الأعداد السالبة والموجبة، والكسرية وغير الكسرية كما هو موضح بالشكل (1.1) والشكل (2.1).



شكل (1.1) : تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية بيانياً على خط الأعداد



شكل (2.1) : مجموعات الأعداد

العمليات على الأعداد الحقيقية

1) خاصية الترتيب

تعتبر خاصية الترتيب من الخصائص الهامة لمجموعة الأعداد الحقيقية (R) وتتضمن ما يلى

أ- إذا كان $a \in R$ فإن واحداً فقط من العمليات الآتية صحيحاً

$$a = 0$$

أو

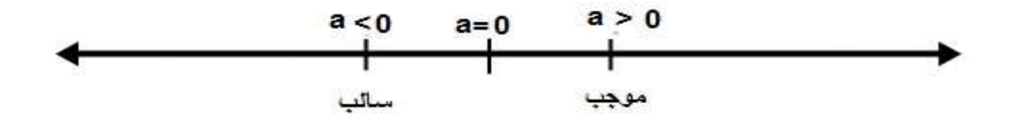
$$a > 0$$

حيث (a) عدد موجب يقع على يمين الصفر على خط الأعداد

أو

$$a < 0$$

حيث (a) عدد سالب يقع على يسار الصفر على خط الأعداد



ب- إذا كان $a, b \in R$ فإن واحداً فقط من العلاقات الأتية يتحقق

$$a < b, \qquad a > b, \qquad a = b$$

2) خاصتى الجمع والضرب

إذا كان

$$a, b, c \in R$$

أى أن a, b, c أعداد صحيحية تنتمى لمجموعة الأعداد الحقيقية

فإنه يمكن إجراء العمليات الأتية على مجموعة الأعداد الحقيقية

الخاصية	الجمع	الضرب
الإنغلاق	$a + b \in R$	$a \times b \in R$
الإبدال	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
التجميع	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
المعكوس	المعكوسس الجمعى للعدد a هو $-a$ حيث أن $a + (-a) = 0$	المعكوس الضربى للعدد a هو $\frac{1}{a}$ حيث أن $a \times \frac{1}{a} = 1$
المحايد	المحايد الجمعى لمجموعة الأعداد الحقيقية هو الصفر $a + 0 = 0 + a = a$	المحايد الضربى لمجموعة الأعداد الحقيقية هو الواحد $a \times 1 = 1 \times a = a$

3) الطرح والقسمة

أولاً: الطرح

$$a - b = a + (-b)$$

وهذا يعنى أن طرح العدد b من العدد a هو جمع العدد a مع المعكوس الجمعى للعد b

ثانياً: القسمة

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

أى أن قسمة العدد a على العدد b يعنى حاصل ضرب a فى المعكوس الضربى للعد b

4) توزيع عملية الضرب على كلاً من عملتى الجمع والطرح

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

مثال (13): أوجد ناتج العمليات الآتية

1- $5(3 + 8) = 5 \times 3 + 5 \times 8 = 15 + 40 = 55$

2- $(-b + 3c)2a = (-b) \times 2a + 3c \times 2a = -2ab + 6ac$

3- $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$

4- $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$

(2.4.1) ألأعداد المركبة

مجموعة الأعداد التخيلية هى الأعداد التى تتيح توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد المركبة والتى تمكننا من إيجاد جذر واحد على الأقل لكثيرات الحدود ويرمز لها عادة بالرمز (i) ويمكن تعريفها على أنها القيمة التى تحقق $i^2 = -1$. وللأعداد التخيلية أهمياتها القصوى فى حسابات التيار المتردد وفى ميكانيكا الكم وفى علم الفيزياء عموماً.

وتُعبِر مجموعة الأعداد المركبة عن مجموع دمج الأعداد التخيلية والأعداد الحقيقية . ويعبر عن العدد المركب رياضياً

$$Z = a + ib$$

حيث (a) هو الجزء الحقيقى ، و (b) هو الجزء التخيلى من العدد المركب وأما الرمز (i) فهو يوضع عادة أمام العدد التخيلى لتميزه عن العدد الحقيقى فى مجموعة الأعداد المركبة.

وتعطى قيمة العدد المركب على الصورة

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

وتلك القيمة تمثل المسافة ما بين نقطة الأصل و أى نقطة على الإحداثيات وتسمى فى بعض الأحيان قيمة العدد المركب بالمقياس أو المعيار.

ومن ناحية أخرى فالأعداد المركبة يمكن أيضاً تمثيلها فى الصورة المثلثية على النحو التالى

لنفرض أن

$$a = r\cos\theta \qquad\qquad b = r\sin\theta$$

إذن

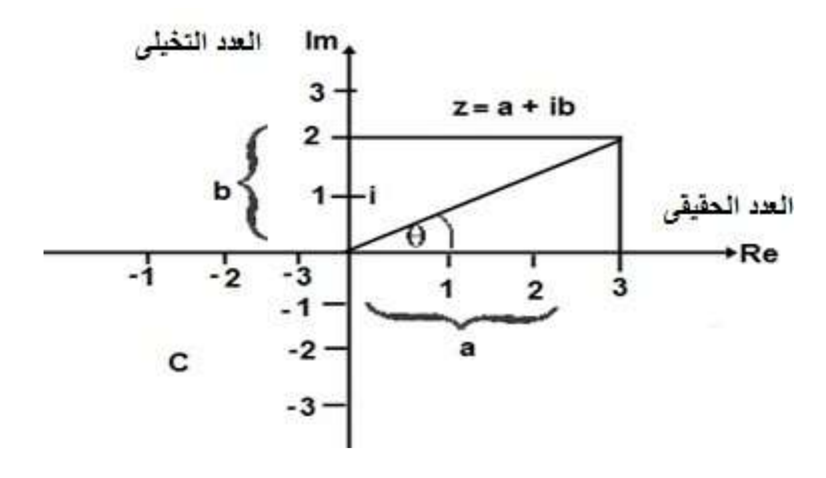
$$Z = (r\cos\theta) + i(r\sin\theta)$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

و أخيراً فالعدد المركب يوضع أيضاً على الصورة الأسية بالشكل

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

و يمكننا تمثيل مجموعتى الأعداد الحقيقية والأعداد المركبة بيانياً على محاور الإحداثيات المتعامدة كما هو موضح بالشكل (3.1).



شكل (3.1) : مجموعتى الأعداد الحقيقية والتخيلية ممثلة على محاور الإحداثيات المتعامدة

وعادة ما يتم تمثيل الأعداد التخيلية على المحور العمودى والأعداد الحقيقية على المحور الأفقى.

نتيجة 1 معادلة أويلر:

لجميع الأعداد الحقيقة θ لدينا

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta$$

وتقتضى معادلة أويلر أنه لكل قيمة للزوية θ لدينا

$$\left|e^{i\theta}\right| = \left|\cos\theta + i\ \sin\theta\right| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = 1$$

باستخدام معادلة أويلر نستطيع كتابة الصورة القطبية للعدد المركب على الشكل

$$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = r \cdot e^{i\theta}$$

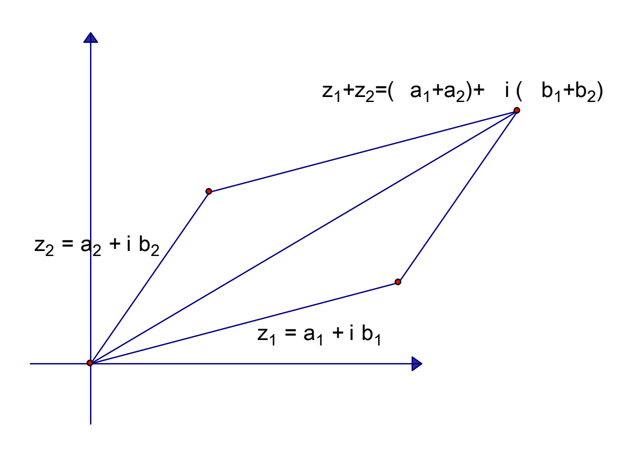
حيث أن $r = |z|$ هو مقياس z و θ هى زاويته.

أيضاً معادلة أويلر تقتضي إمكانية كتابة التعبير e^{x+iy}، حيث x و y متغيران حقيقيان ، على الشكل

$$e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x} (\cos y + i \sin y)$$

إذاً مقياس e^{x+iy} ، أي المسافة من نقطة الأصل إلى e^{x+iy} ، يعتمد فقط على المتغير الحقيقي x و يحدد المتغير التخيلي y موقع العدد على الدائرة التي نصف قطرها e^{x} ومركزها نقطة الأصل.

الشكل التالي يمثل جمع عددين مركبين $z_1 = a_1 + b_1 i$ و $z_2 = a_2 + b_2 i$ كجمع متجهات. يمثل العددين a_1 و a_2 في اتجاه محور الإحداثيات الأفقي و b_1 و b_2 في اتجاه المحور الرأسي .



شكل (4.1): الجمع الإتجاهى لعددين مركبينى

التعريف القياسي لعملية الضرب لا يعطينا تمثيلاً اتجاهياً مناسبا. سنبدأ بكتابة الأعداد المركبة في الصورة القطبية وتطبيق معادلة أويلر لنجد

$$z_1 = a_1 + ib_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$$

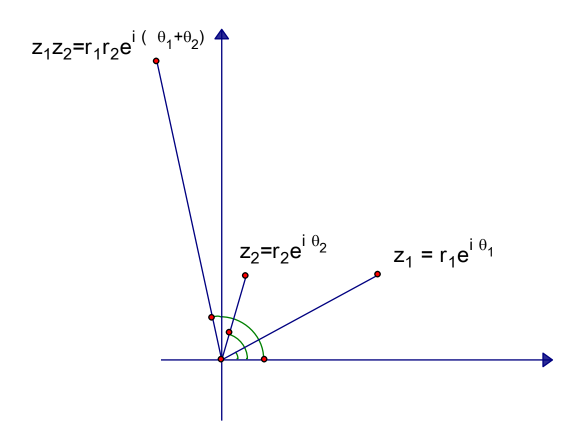
و

$$z_2 = a_2 + ib_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

و باستخدام خواص الأسس و معادلة أويلر مرة أخرى نحصل على

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2))$$

هذا يقتضي أنه من الممكن الحصول على حاصل ضرب z_1 و z_2 بضرب المقياسين و جمع الزاويتين كما هو موضح في الشكل التالي



شكل (5.1): حاصل ضرب عددين مركبين

نتيجة (2) مقلوبات الأعداد المركبة

تعطينا معادلة أويلر طريقة أخرى لإيجاد مقلوب عدد مركب. فقواعد الأسس تقتضي أنه إذا كان $z = re^{i\theta}$ فإن

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

نتيجة (3) معادلة ديموافر

$$(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\,\sin n\theta$$

هذه النتيجة تتتبع من معادلة أويلر لأن

$$(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\,\sin n\theta$$

معادلة ديموافر تعطينا طريقة مناسبة لإيجاد الجذور النونية للأعداد الحقيقية والمركبة.

نتيجة (4) جذور الأعداد المركبة

لنفرض أن n عدد صحيح موجب و z عدد مركب. سيوجد عدد n من الجذور للعدد z ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالآتى

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

حيث $k = 0,1,\ldots,n-1$

لإثبات هذه النتيجة سنبدأ بكتابة w و z في الصورة القطبية أي أن

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{و} \quad w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$$

حيث $r \geq 0$ و $s \geq 0$. ليتحقق التساوي

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = w^n = s^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n = s^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

يجب أن يكون لدينا

$s = r^{1/n}$ و $n\phi = \theta + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح .

مثال (14):
إذا كان لدينا i بحيث $i^2 = -1$ فأوجد قيمة

$$(i - i^{-1})^{-1}$$

الحل:

نبداء أولاً بتبسيط المقدار i^{-1} فنحصل على

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

إذاً

$$(i - i^{-1})^{-1} = (i + i)^{-1} = (2i)^{-1} = 2^{-1}i^{-1} = \frac{1}{2}(-i) = -\frac{i}{2}$$

مثال (16):

أوجد قيمة z^6 إذا كانت $z = 1 + i\sqrt{3}$.

الحل:

أولاً نضع العدد z فى الصورة المثلثية حتى يمكننا تطبيق نظرية ديموافر

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore z^6 = \left[2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\right]^6 = 2^6\left[\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right]$$

$$= 64\,(1 + i.0) = 64$$

نتيجة (4) :إيجاد مفكوك $\cos n\theta,\ \sin n\theta$ **بدلالة قوى** $\cos\theta,\ \sin\theta$

من نظرية ديموافر

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= \cos^n\theta + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta) + \dots\ + (i\sin\theta)^n$$

حيث n عدد صحيح موجب

وبمساواة الجزء الحقيقى بالحقيقى والتخيلى بالتخيلى فى الطرفين نجد أى أن

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta \pm \dots,$$

$$\sin n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta \pm \dots,$$

حيث

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

مثال (16):

أوجد مفكوك $\cos 5\theta$ ومفكوك $\sin 5\theta$ ثم اثبت أن :

$$\sec\theta\cos 5\theta = 1 - 12\sin^2\theta + 16\sin^4\theta$$

الحل:

من نظرية ديموافر ينتج أن

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^5$$

$$= \cos^5\theta + \binom{5}{1}\cos^4\theta\ (i\sin\theta) +$$

$$+\binom{5}{2}\cos^3\theta(i\sin\theta)^2+\binom{5}{3}\cos^2\theta(i\sin\theta)^3+$$

$$+\binom{5}{4}\cos\theta\,(i\sin\theta)^4+(i\sin\theta)^5$$

مثال (17):

إذا كتبنا الحلول الستة للمعادلة $z^6=-64$ على الصيغة $a+bi$ حيث a و b عددان حقيقيان. فما هو حاصل ضرب تلك الحلول التي بها $a>0$.

الحل:

معادلة ديموافر تقتضي أن الجذور السادسة الستة للعدد

$$z^6=-64=64(\cos\pi+i\sin\pi)$$

هي

$$z_k=64^{1/6}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\right)$$

حيث $k=0,1,2,3,4,5$

هذه الجذور موزعة بمسافات متساوية حول الدائرة التي نصف قطرها $64^{1/6}=2$ ابتداً من

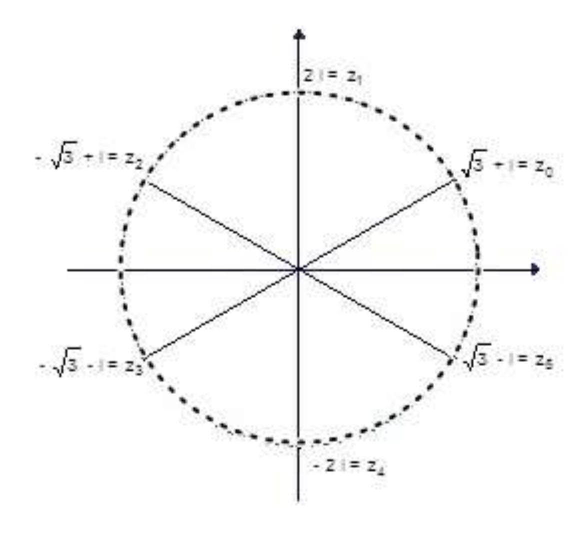
$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$$

كما هو موضح في الشكل أدناه، حلول $z^6=-64$ التي لها جزء حقيقي موجب هي

$$z_5=\sqrt{3}-i \quad \text{و} \quad z_0=\sqrt{3}+i$$

وهذان عددان مركبان مترافقان. لذا فحاصل ضربهما هو

$$z_0\cdot z_5=z_0\cdot\overline{z_0}=|z_0|^2=(\sqrt{3})^2+(1)^2=4$$



مثال (18):

لنفرض أن n عدد صحيح موجب وأن $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ حيث $0<\theta<\pi$. فما هي قيمة $z^n+\frac{1}{z^n}$؟

الحل:

يمكن تحويل المعادلة المعطاة إلى معادلة تربيعية فى z على الصورة

$$z^2-(2\cos\theta)z+1=0$$

الصيغة التربيعية تقتضي كون

$$z=\frac{2\cos\theta}{2}\pm\frac{\sqrt{(4\cos\theta)^2-4}}{2}=\cos\theta\pm\sqrt{-(\sin\theta)^2}=\cos\theta\pm i\ \sin\theta$$

وحيث أن مقياس z يساوى 1 فإن علاقة مقلوب العدد المركب تقتضي كون

$$\frac{1}{z}=\bar{z}=\cos(-\theta)\pm i\ \sin(-\theta)=\cos\theta\mp i\ \sin\theta$$

وتطبيق نظرية ديموافر على التعبير المعطى يحوله إلى

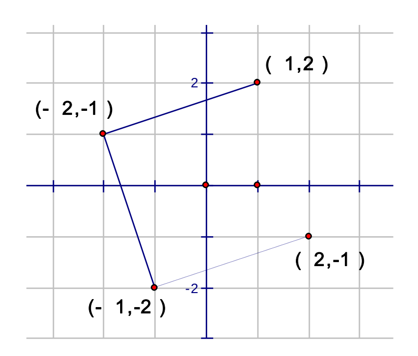
$$z^n+\frac{1}{z^n}=z^n+\left(\frac{1}{z}\right)^n=(\cos n\theta\pm i\ \sin n\theta)+(\cos n\theta\mp i\ \sin n\theta)$$
$$=2\cos n\theta$$

مثال (19):

تقع أربعة أعداد مركبة على رؤوس مربع في المستوي المركب. إذا كانت $1+2i$ و $-2+i$ و $-1-2i$ ثلاثة من هذه الأعداد فما هو العدد الرابع.

الحل:

يمكننا وضع هذا السؤال في صيغة مألوفة بملاحظة أن العدد المركب يُمثل بأخذ جزءه الحقيقي على المحور الأفقي (محور x) وجزءه التخيلي على المحور الرأسي (محور y). فالشكل التالي يبين الأعداد المعطاة .



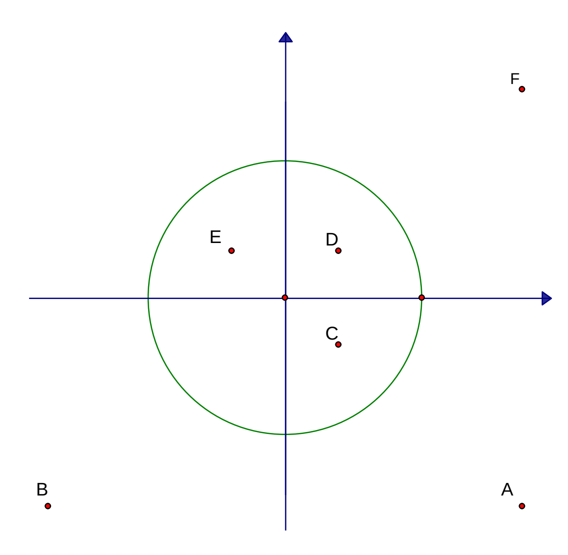
فترة الخط المستقيم التي تربط $(-2,1)$ و $(1,2)$ تزيد ثلاث وحدات في اتجاه x و وحدة واحدة في اتجاه y.

النقطة التي تقع عند نهاية الفترة الموازية و التي تبدأ عند $(-1,-2)$ هي $(-1+3,-2+1)=(2,-1)$ و تمثل العدد المركب $2-i$.

لاحظ أن زوج النقاط $(1,2)$ و $(-1,-2)$ المُعطى في المسألة متناظر بالنسبة لنقطة الأصل و كذلك النقطة المُعطاة $(-2,1)$ و النقطة الجديدة $(2,-1)$. إذاً العدد المركب المطلوب هو $2-i$.

مثال (20):

يبين الشكل التالي بعض الأعداد في المستوي المركب. الدائرة هي دائرة الوحدة التي مركزها نقطة الأصل. فأي من هذه الأعداد قد يكون مقلوب F.



الحل:

يمكن التعبير عن مقلوب العدد المركب $z \neq 0$ بالصيغة

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

وبالتالي فإن مقلوب F له نفس زاوية مرافق F. وحيث أن F يقع في الربع الأول فمقلوبه سيقع في الربع الرابع وهذا يقتضي كون C و A الإمكانيتان الوحيدتان . حيث أن F تقع خارج دائرة الوحدة (مقياسها يزيد عن الواحد) فإن مقياس مقلوبها أقل من الواحد. فالإمكانية الوحيدة هي C.

حيث أنه المسألة لم تحدد عدداً معيناً في الربع الأول وخارج دائرة الوحدة فإنه يمكننا أيضاً حل المسألة بأخذ عدد معين و تحديد موقع مقلوبه ، مثلاً إذا كان $z = 1+i$ فإن

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1-i}{2}$$

إذن $1/z$ يقع في الربع الرابع و داخل دائرة الوحدة ، لأن $|1-i| = \sqrt{2} < 2$.

مثال (21):

إذا عرِّفنا متتابعة من الأعداد المركبة بالمعادلتين $z_1 = 0$ و $z_{n+1} = z_n^2 + i$ لكل عدد صحيح موجب n. فما هي قيمة $|z_{2005}|$.

الحل:

كما في كثير من مسائل المتتابعات فإننا نأمل أن نجد صيغة متكررة للحدود. وبحساب بعض الحدود الأولى نجد أن

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = i$$

$$z_3 = i^2 + i = -1 + i$$

$$z_4 = (-1+i)^2 + i = -i$$

$$z_5 = (-i)^2 + i = -1 + i = z_3$$

إذاً فالحدود الفردية بعد $n = 3$ تساوى

$$-1 + i = z_3$$

والحدود الزوجية تساوى

$$-i = z_4$$

حيث أن الحد المطلوب حد فردي فإننا نجد أن

$$|z_{2005}| = |-1+i| = \sqrt{2}$$

مثال (22):

لنفرض S مجموعة النقاط z في المستوي المركب التي تحقق كون $z(3+4i)$ عدد حقيقي. فما الشكل الهندسى الذى يمثله شكل S؟

الحل:

لدينا أن

$$(3+4i)z = (3+4i)(x+iy) = (3x+4y)+(4x+3y)i$$

سيكون عدداً حقيقياً إذا و فقط إذا تحققت المعادلة

$$0 = 4x+3y$$

المعادلة السابقة معادلة خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (ميله $-4/3$) .

مثال (23):

بسط المقدار $(i+1)^{2008}-(i-1)^{2008}$.

الحل:

زاوية العدد المركب $1+i$ تساوى $\pi/4$ ومقياسه يساوى $|i+1| = \sqrt{2}$. زاوية العدد المركب $i-1$ تساوى $3\pi/4$ و مقياسه يساوى $|i-1| = \sqrt{2}$. بتطبيق معادلة ديموافر نحصل على

أولاً: العدد المركب $(i+1)^{2008}$

$$\begin{aligned}
(1+i)^{2008} &= \left(\sqrt{2}\right)^{2008}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2008} \\
&= 2^{1004}\left(\cos\left(\frac{2008}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2008}{4}\pi\right)\right) \\
&= 2^{1004}(\cos(502\pi)+i\sin(502\pi)) \\
&= 2^{1004}
\end{aligned}$$

ثانياً: العدد المركب $(i-1)^{2008}$

$$(1-i)^{2008} = \left(\sqrt{2}\right)^{2008}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{2008}$$
$$= 2^{1004}(\cos(3\cdot 502\pi) + i\,\sin(3\cdot 502\pi))$$
$$= 2^{1004}$$

إذن

$$(1+i)^{2008} - (1-i)^{2008} = 0$$

مثال (24):

إذا كان العدد المركب z يحقق المعادلة $z + |z| = 2+8i$. فأوجد قيمة $|z|^2$.

الحل:

إذا كتبنا z كمجموع جزء حقيقي و آخر تخيلي على الصورة

$$z = x+iy$$

فإننا نجد أن

$$2+8i = x + iy + \sqrt{x^2+y^2} = \left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right) + iy$$

إذاً $8 = y$ و $2 = x + \sqrt{x^2+y^2} = x + \sqrt{x^2+64}$

بتربيع طرفي المعادلة

$$2-x = \sqrt{x^2+64}$$

نحصل على

$$4-4x+x^2 = x^2+64$$

وبالتالي

$$x = -15$$

عملية التربيع يمكن أن تُنتج حلاً خارجياً (ليس حل للمعادلة قبل التربيع) فنحن بحاجة إلى التأكد من كون (-15) حل للمعادلة الأصلية و هذا ما نجده لأنه لهذه القيمة

$$-15+\sqrt{(-15)^2+64}=-15+\sqrt{225+64}=-15+17=2$$

إذاً

$$|z|^2=x^2+y^2=(-15)^2+8^2=225+64=289$$

مثال (25):

إذا كانت جذور كثيرة الحدود

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

أعداداً مركبة تقع على دائرة الوحدة حيث a و b و c و d أعداد حقيقية. فأوجد حاصل جمع مقلوبات جذور $P(x)$.

الحل:

مقلوب العدد المركب z يساوى

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

حيث أن جذور $P(x)$ تقع على دائرة الوحدة فإن مقياس كل منها يساوى 1 . هذا يقتضي كون مقلوب كل جذر هو مرافقه المركب. أيضاً حاصل جمع الجذور يساوى عدد حقيقي $-a$ وبالتالي فإن حاصل جمع الأجزاء التخيلية للجذور يساوى 0. إذاً فحاصل جمع المرافقات المركبة لهذه الجذور يساوى مجموع الجذور أي $-a$.

مثال (26):

لنفرض أن

$$x=(-1+i\sqrt{3})/2$$

$$y=(-1-i\sqrt{3})/2$$

فأي من الجمل الآتية **غير** صحيحة؟

(أ) $x^5+y^5=-1$ (ب) $x^7+y^7=-1$ (ج) $x^9+y^9=-1$ (د) $x^{11}+y^{11}=-1$

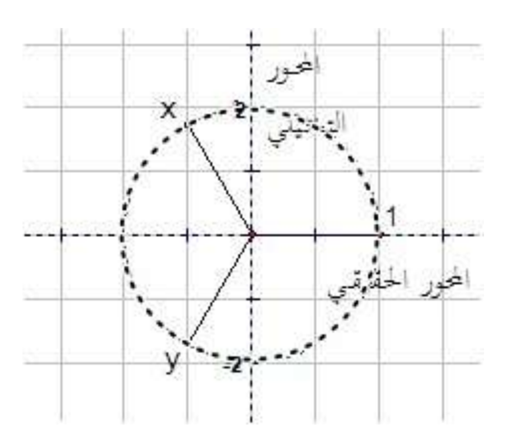
(هـ) $x^{13}+y^{13}=-1$

الحل:

حيث أن x و y عددان مركبان مترافقان فإن مجموعهما يساوى مجموع جزئيهما الحقيقيين و هذا يساوى-1. بكتابة x و y في الصورة القطبية

$$x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

و $$y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$



نجد من معادلة ديموافر أن

$$x^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = y$$
$$y^2 = \cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = x$$
$$x^3 = \cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3} = 1$$
$$y^3 = \cos\frac{12\pi}{3} + i\sin\frac{12\pi}{3} = 1$$

و بالتالي إذا لم تكن n من مضاعفات العدد 3 فإن

$$x^n + y^n = x + y = -1$$

و إذا كانت n من مضاعفات 3 فإن

$$x^n + y^n = 2$$

إذاً فالجملة الغير صحيحة هي فقط (ج).

مثال (27):

ما هو حاصل ضرب الأجزاء الحقيقية لحلول المعادلة $z^2 - z = 5 - 5i$ ؟

الحل:

أولاً بكتابة جذور هذه المعادلة التربيعية على الشكل

$$r_2 = a_2 + ib_2 \quad \text{و} \quad r_1 = a_1 + ib_1$$

نجد أن

$$0 = z^2 - z + (-5 + 5i) = (z - (a_1 + ib_1))(z - (a_2 + ib_2))$$

بما أن مجموع الجذران يساوى سالب معامل الحد الخطى فإن

$$-(-1) = 1 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

بمساواة الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية نجد أن

$$1 = a_1 + a_2$$

و

$$0 = b_1 + b_2$$

و حيث الحد الثابت يساوي حاصل ضرب الجذران، فإن

$$\begin{aligned} -5 + 5i &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_1) \\ &= a_1 a_2 + b_1^2 + i(a_2 - a_1)b_1 \end{aligned}$$

بمساواة الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية في هذه المعادلة نحصل على المعادلتين

$$b_1 = \frac{5}{a_2 - a_1} \quad \text{و} \quad a_1 a_2 = -5 - b_1^2$$

سنربع المعادلة الثانية و نعوض بالقيمة الناتجة عن b_1^2 في المعادلة الأولى . قد يبدو أن هذا غير مجدي لكن باستخدام $a_1 + a_2 = 1$ نستطيع تبسيط هذا التعبير

$$\begin{aligned} b_1^2 &= \frac{5^2}{(a_2 - a_1)^2} = \frac{25}{a_2^2 - 2a_1 a_2 + a_1^2} \\ &= \frac{25}{(a_2^2 + 2a_1 a_2 + a_1^2) - 4a_1 a_2} = \frac{25}{(a_2 + a_1)^2 - 4a_1 a_2} = \frac{25}{1 - 4a_1 a_2} \end{aligned}$$

إذاً فلدينا

$$a_1a_2 = -5 - b_1^2 = -5 - \frac{25}{1-4a_1a_2}$$

و نستطيع تحويل هذه إلى معادلة تربيعية في a_1a_2 هي

$$0 = 4(a_1a_2)^2 + 19(a_1a_2) - 30 = (a_1a_2 + 6)(4a_1a_2 - 5)$$

إذاً إما

$a_1a_2 = -6$ أو $a_1a_2 = 5/4$.

لكن الحل الثاني حل خارجي (ليس حل للمعادلة الأصلية) لأن

$a_1a_2 = -5 - b_1^2 < 0$. إذاً $a_1a_2 = -6$.

خاصية :

إذا كان العدد المركب يكتب على الصورة $a + ib$ فإن مرافق العدد المركب (العدد المركب المصاحب) يكتب على الصورة $a - ib$. وفى حالة ضرب العدد المركب فى مرافقه نحصل على الآتى

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - i^2b^2$$

$$= a^2 + b^2 \qquad \text{(عدد حقيقى)}$$

حيث $i^2 = -1$

العمليات على الأعداد المركبة

يمكن جمع وطرح الأعداد المركبة وذلك من خلال جمع وطرح الجزء الحقيقى والجزء التخيلى كلاً على حدا كالأتى :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

الأعداد المركبة يمكن ضربها كما هو المعتاد بالنسبة لعمليات الضرب العادية وذلك عن طريق ضرب الأجزاء المختلفة ببعضها مع إستبدال $(i^2 = -1)$

$$(a+ib)(c+id) = ac + iad + icb + i^2bd$$

$$= (ac-bd) + i(ad+bc)$$

وفى الصورة المثلثية:

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$Z_2 = r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2\ )$$

$$Z_1Z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

ويمكننا أيضاً قسمة الأعداد المركبة وذلك عن طريق ضرب المقام والبسط فى مرافق المقام

$$\frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c^2+d^2)}$$

وفى الصورة المثلثية

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

مثال (28):

1- إذا كان

$$Z = 3-j \qquad W = 1+2j$$

فأوجد ما يلى

أ) $2Z - 3W$

ب) ZW

ج) $Z^2W\bar{Z}^2$

ح) $\frac{Z}{W}$

الحل

أ)

$$2Z - 3Z = 2(3 - j) - 3(1 + 2j) = 6 - 2j - 3 - 6j = 3 - 8j$$

ب)

$$ZW = (3 - j)(1 + 2j) = 3 - j + 6j - 2j^2 = 3 + 5j - 2(-1)$$

$$= 5 + 5j$$

ج)

$$Z^2W\,\bar{Z}^2 = w\left(z\,z,^{-}\right)^2 = (1 + 2j)\left(3^2 + (-1)^2\right)$$

$$= 10(1 + 2j) = 10 + 20j$$

د)

خطأ! = = **خطأ!** = **خطأ!** = **خطأ!**

مثال (29): أوجد حل المعادلة التالية

$$Z^2 = 1 + i$$

الحل

لنفرض أن

$$Z = x + iy$$

إذن نجد أن

$$Z^2 = (x + iy)^2 = 1 + i$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 1 + i$$

بمقارنة المعاملات على طرفى المعادلة

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad (1)$$

$$2xy = 1 \qquad (2)$$

من المعادلة (2) نحصل على

$$y = \frac{1}{2x} \qquad (3)$$

وبالتعويض من المعادلة (3) فى المعادلة (1)

$$x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 1$$

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 1$$

بضرب طرفى المعادلة السابقة فى $4x^2$

$$4x^4 - 1 = 4x^2$$

ومن ثم نحصل على

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0 \qquad (4)$$

بإستخدام القانون العام يمكننا حل المعادلة (4) كما يلى

$$x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

ومن ثم نجد أن

$$x = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} \qquad (5)$$

وبالتعويض من المعادلة (5) فى المعادلة (3) نحصل على

$$y = \pm\frac{1}{2\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{4(1 + \sqrt{2}}{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \qquad (6)$$

من المعادلة (5) و (6) نجد أن الحل العام للمعادلة $Z^2 = 1 + i$ يعطى على الصورة

$$Z = \pm\left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}}}\right)$$

مثال (30): أوجد الحل العام للمعادلة الآتية

$$z^2 + \left(\sqrt{3} + i\right)z + 1 = 0$$

الحل

بإستخدام القانون العام نجد أن

$$z = \frac{-(\sqrt{3} + i) \pm \sqrt{\left(\sqrt{3} + i\right)^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{-(\sqrt{3}+i) \pm \sqrt{(3+2\sqrt{3}i-1)-4}}{2}$$

$$z = \frac{-(\sqrt{3}+i) \pm \sqrt{-2+2\sqrt{3}i}}{2} \qquad (1)$$

لنفرض أن

$$w^2 = -2 + 2\sqrt{3}i \qquad (2)$$

وبوضع

$$w = x + iy$$

إذن يمكننا كتابة المعادلة (2) على الصورة

$$w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = -2 + 2\sqrt{3}i \qquad (3)$$

بمقارنة معاملات الحدود التخيلة والحقيقية على طرفى المعادلة السابقة

$$x^2 - y^2 = -2 \qquad (4)$$

$$2xy = 2\sqrt{3} \qquad (5)$$

من المعادلة (5) نجد أن

$$y = \frac{\sqrt{3}}{x} \qquad (6)$$

وبالتعويض عن قيمة (y) فى المعادلة (4)

$$x^2 - \frac{3}{x^2} = -2$$

إذن

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

$$(x^2+3)(x^2-1)=0$$

إذن

$$(x^2-1)=0$$

$$x=\pm 1 \qquad (7)$$

وبالتعويض عن قيمة (x) فى المعادلة (6)

$$y=\pm\sqrt{3} \qquad (8)$$

ومن ثم نجد أن

$$z=\frac{-\sqrt{3}-1\pm\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2}$$

إذن

$$z=\frac{1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2}$$

أو

$$z=\frac{1-\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2}$$

مثال (31): أوجد الجذر التكعيبى للواحد

الحل

إيجاد الجذر التكعيبى للواحد يعنى أن نقوم بحل المعادلة

$$z^3=1$$

$$z^3-1=0$$

يمكننا كتابة المعادلة السابقة على الصورة

$$(z-1)(z^2+z+1)=0$$

إذن

$$(z-1)=0 \quad \text{أو} \quad (z^2+z+1)=0$$

ومن ثم نجد أن

$$z=1$$

وبحل المعادلة الثانية بإستخدام القانون العام

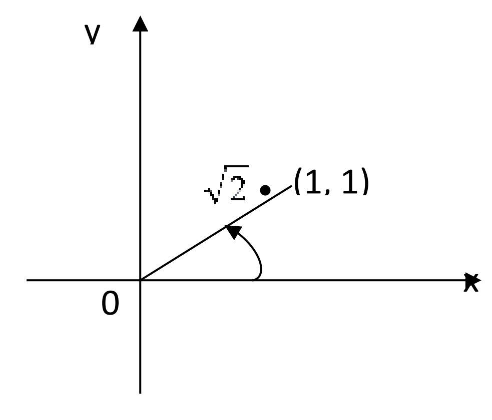
$$(z^2+z+1)=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

إذن هناك ثلاث قيم للجذر التكعيبى للواحد وهى $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ و 1

مثال (32):

ضع العدد المركب $z=1+i$ فى الصورة المثلثية.

الحل:



واضح أن

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \text{ ، } \theta=\tan^{-1}(1)=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

مثال (33):

ضع العدد المركب

$$z=\frac{1}{(2+i)^2}-\frac{1}{(2-i)^2}$$

فى الصورة المثلثية والقياسية.

الحل:

نضع العدد z فى الصورة القياسية أولاً

$$z=\frac{(2-i)^2-(2+i)^2}{(2+i)^2(2-i)^2}=\frac{3-4i-(3+4i)}{(4+1)^2}$$

$$=-\frac{8}{25}i$$

$$\therefore\ r=\sqrt{0+\left(\frac{8}{25}\right)^2}=\frac{8}{25}\ ,$$

ثانياً نضع العدد المركب فى الصورة المثلثية

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-8/25}{0}\right)=\tan^{-1}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ z=\frac{8}{25}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

5.1) الأسس و الجذور

1) الأس

لنعتبر أن لدينا عدداً حقيقى (x) و كان (n) عدداً ينتمى للأعداد الطبعية فإن

$$x^n = nx$$

أى أن الأس النونى للعدد (x) يساوى حاصل ضرب (x) عدد (n) من المرات

مثال (34):

1- $8^2 = 8 \times 8 = 64$

2- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

3- $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

خصائص:

إذا كان (n) و (m) عددان صحيحان موجبان وكان $a, b \neq 0$ فإن

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^m = a^m a^m \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

مثال (35):

1- $(-2)^0 = 1$

2- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

3- $\frac{(-2)^{-3}}{(-3)^{-2}} = \frac{(-3)^2}{(-2)^3} = \frac{9}{-8}$

4- $2^2 \times 2^5 = 2^{2+5} = 2^7$

5- $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

6- $(a^4)^{-3} = a^{4\times -3} = 12^{-12}$

7- $\left(\frac{-a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$

2) الجذر

يسمى العدد (x) بالجذر النونى للعدد (a) إذا كان

$$x^n = a$$

حيث (a) عدد طبيعى أكبر من الواحد و $a, x \in R$

وتكتب الصغية الرياضية لذلك على الصوره

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

ملاحظة :

إذا كان (n) عدد طبيعى زوجى وكانت قيمة العدد (a) أقل من الصفر فإن قيمة الجذر $\sqrt[n]{a}$ تكون غير معلومة فى مجموعة الأعداد الصحيحة.

أ) الجذور التربيعية

إذا كان $a \in R$ حيث أن $a \geq 0$ فإن

$$\sqrt{a} = b$$

حيث b عدد حقيقاً ليس سالباً مربعه هو a (أن أى $b^2 = a$)

خواص الجذور التربيعية

إذا كان $a, b \in R$ فإن

.1

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

والعكس صحيح حيث $a \geq 0, \quad b \geq 0$

.2 $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

والعكس صحيح حيث أن $b \neq 0$,$a \geq 0$.

3. $$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

والعكس صحيح حيث $a \geq 0$.

الجذر التربيعى لعدد مركب

نفرض أن العدد المركب المراد إيجاد جذره التربيعى هو $z = a + ib$ ، ونفرض أن

$$\sqrt{z} = x + iy$$

بتربيع الطرفين ، إذن

$$Z = a + ib = (x + iy)(x + iy) = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

ومن تعريف تساوى عددين مركبين نحصل على

$$x^2 - y^2 = a \qquad (1)$$

$$2xy = b \qquad (2)$$

بتربيع (1) و (2) والجمع نحصل على

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (3)$$

من المعادلتين (1) و (3) نحصل على

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

ولاختيار x, y نأخذ فى الاعتبار المعادلة رقم (2) فإذا كانت $b > 0$ فإن اشارتى x, y نفس الاشارة وإذا كانت $b < 0$ فإن إشارتى x, y مختلفتين.

مثال (35): أوجد الجذر التربيعى للعدد المركب $z = 15 - 8i$.

الحل:

نفرض أن

$$\sqrt{15 - 8i} = x + iy$$

إذن

$$15 - 8i = (x + iy)(x + iy) = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 15 \qquad (1)$$

$$2xy = -8 \qquad (2)$$

بالتربيع والجمع نحصل على

$$\therefore\ x^2 + y^2 = 17 \qquad (3)$$

من (1) و (3) نحصل على

$$x = \pm 4 \quad , y = \pm 1$$

ولاختيار x, y نأخذ فى الاعتبار أن حاصل ضربهم مقدار سالب وذلك من المعادلة (2). إذن الجذر التربيعى للعدد المركب هو أما

$$-4 + i$$

أو

$$4 - i$$

الجذر التربيعى لمعادلة الدرجة الثانية

نعتبر الآن المعادلة العامة من الدرجة الثانية

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0$$

ذات المعاملات المركبة. فيكون جذور هذه المعادلة كما هو معروف

$$z^2 = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} - \beta}$$

وتؤول مسألة إيجاد جذور المعادلة السابقة إلى ايجاد الجذور التربيعية للعدد المركب $\frac{\alpha^2}{4} - \beta$.

مثال (36):

أوجد جذور المعادلة $z^2 + 2z + 2 = 0$

الحل:

حيث أن

$$\frac{\alpha^2}{4} - \beta = 1 - 2 = -1 < 0$$

فإنه ليس لهذه المعادلة أى جذور حقيقية. بتطبيق ما سبق نجد أن جذور هذه المعادلة هما

$$-1 + i \quad , \quad -1 - i$$

ويجب ملاحظة أن هذان الجذران مترافقان.

مثال (37):

أوجد جذور المعادلة $z^2 - (4 - 6i)z + (-8 - 20i) = 0$

الحل:

$$z = \frac{4 - 6i}{2} \pm \sqrt{\frac{(4 - 6i)^2}{4} - (-8 - 20i)}$$

$$= (2 - 3i) \pm \sqrt{4 - 9 - 12i + 8 + 20i}$$

$$= (2 - 3i) \pm \sqrt{3 + 8i}$$

ولإيجاد $\sqrt{3 + 8i}$ نفرض أن

$$\sqrt{3 + 8i} = x + iy$$

$$\therefore \; 3 + 8i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\therefore\ x^2 - y^2 = 3 \qquad (1)$$

$$2xy = 8 \qquad (2)$$

بالتربيع والجمع

$$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{73} \qquad (3)$$

من المعادلتين (1) و (2) يمكن تعين قيم x, y الممكنة ، ومن (2) يمكن تعيين إشارة كلا من x, y ثم نعوض فى قيمة z لنوجد قيمتان لها.

ب) الجذور التكعبية

إذا كان $a \in R$

فإن

$$\sqrt[3]{a} = b$$

هو العدد الذى مكعبه a أى أن

$$b^3 = a$$

خواص الجذور التكعيبية

إذا كان $a, b \in R$ فإن

1. $\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
2. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

3. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a \times a^2}$

4. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2} \neq a$

مثال (37):

1- $\sqrt{100} = \sqrt{(10)^2} = 10$

2- $\sqrt{8} = \sqrt{(2)^3} = (2)^{\frac{3}{2}}$

3- $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(2)^3} = 2$

4- $\sqrt{-4} =$ غير معرف

5- $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

6- $\sqrt[3]{27x^{18}} = \sqrt[3]{3^3 x^{(3)(6)}} = 3x^6$

7- $\sqrt[3]{8x^{18}y^{15}} = \sqrt[3]{2^3 x^{(3)(6)} y^{(3)(5)}} = 2x^6 y^5$

8- $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

تمارين

1- حدد أى التجمعات التالية تمثل مجموعة وأيها لا يمثل مجموعة مع التعليل

أ- أحرف هجاء اللغة العربية

ب- عدد الدول الأعضاء فى جامعة الدول العربية

ج- سرب من الطيور

ح-الأعداد 1، 2، 3، 4، 5

2- مثل المجموعات الآتية بأشكال فن

أ- مجموعة أشهر السنة الهجرية

ب- مجموعة الأرقام الفردية المحصورة بين 1 و12

ج- مجموعة الأرقام الزوجية المحصورة بين 6 و 18

ح- مجموعة الأشهر الميلادية الفردية

3- إذا كانت

$$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$
$$Y = \{a, b, c, d, e\}$$
$$Z = \{c, d, e, f\}$$
$$G = \{a, b, c, g, h\}$$

فأوجد ما يلى

1- $X \cup Y$

2- $X \cup Z$

3- $X \cap Y$

4- $G - Z$

5- $X \cup Y$

6- $(X \cup Y) \cup Z$

7- $(G \cup Y) \cap Z$

4- حقق العلاقات الآتية

1- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3- $A \cap (B \cup C) = A$

4- $A \cup (B \cap C) = A$

5- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (B - C)$

الباب الثانى

كثيرات الحدود

الباب الثانى

كثيرات الحدود

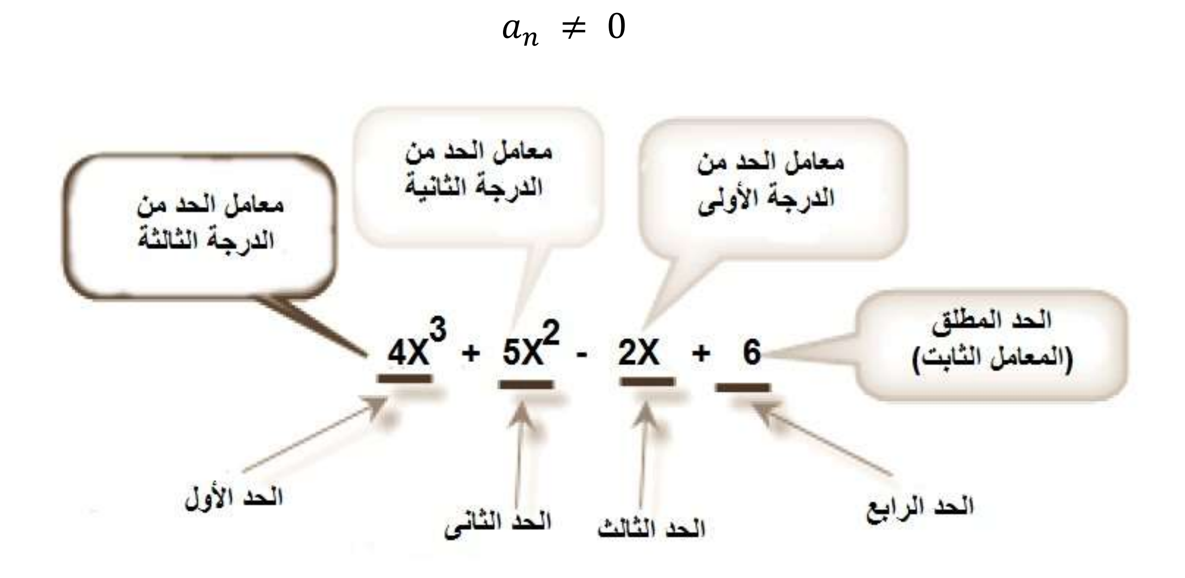
1.2) تعريف كثيرة الحدود

تسمي الدالة $f(x)$ المعرفه بالشكل التالي

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 \qquad (2.1)$$

كثيرة حدود من الدرجة (n) بالنسبة للمتغير(x) حيث أن (n) عدد صحيح موجب و (a_n) معاملات الدالة حيث أن

$$a_n \neq 0$$



شكل (1.2): تمثيل الحدود والمعاملات المخلفة لكثيرة الحدود

إذا كانت $a = 0$ فإن المعادلة (1.2) تسمى صفر كثيرات الحدود وتكتب على الصورة

$$f(x) = 0 \qquad (2.2)$$

ونقول أن كثيرة الحدود من الدرجة الأولى إذا كانت أعلى قوة للمتغير (x) تظهر في المعادلة هي واحد و من الدرجة الثانية إذا كانت أعلى قوة ل للمتغير x هي اثنين وهكذا.

مثال: حدد درجة المعادلات الخطية الآتية ثم حدد معامل أعلى قوى فيها

1- $x^3 + 5x^2 - 6$ 2- $4x^6 - x^3 + x$

3- $5x^2 - 7x^3 + 2$ 4- $x^{43} - x^3$

الحل

1- المعادلة من الدرجة الثالثة ومعامل اعلى قوة هو الواحد.

2- المعادلة من الدرجة السادسة ومعامل أعلى قوة هو أربعة.

3- المعادلة من الدرجة الثالثة ومعامل أعلى قوة هو سبعة.

4- المعادلة من الدرجة الثالثة والأربعون ومعامل أعلى قوة هو الواحد.

مثال: أوجد حل المعادلات الخطية الآتية

1- $-3x^4 - x^3 + 20x + 3$ إذا كانت $x = 1$

2- $5x^2 + x^3 + 2x + 11$ إذا كانت $x = 22$

3- $x^{14} - x^{11} + 3$ إذا كانت $x = 15$

الحل

1- بالتعويض عن $x = 1$

$$-3(1)^4 - (1)^3 + 20(1) + 3 = 19$$

وبالمثل فى الفقرتين (2) و (3).

2.2) العمليات على كثيرات الحدود

ليكن لدينا كثيري الحدود التاليين

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots b_1 x + b_0$$

فإن

1) تساوي كثيرات الحدود

نقول عن كثيرةى الحدود $f(x)$ و $g(x)$ أنهما متساويان إذا كان

$$a_n = b_m \quad و \quad n = m$$

2) عمليتى الجمع و الطرح

لجمع أو طرح كثيرات الحدود فإننا نقوم بجمع أو طرح معاملات الحدود المتشابها بإستعمال قوانين الجمع والطرح العادية.

فعلى سبيل المثل بالنسبة لعملية الجمع إذا كان

$$\mathrm{f(x)} = 6\mathrm{x}^2 + 7\mathrm{x} - 5$$

$$g(x) = 2\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 4$$

فإن

$$H(x) = f(x) + g(x) = 8\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} - 1$$

وبالمثل بالنسبة لعملية الطرح فإننا نقوم بطرح معاملات الحدود المتشابها

تمرين: أوجد ناتج حاصل جمع أو طرح ما يلى

1- $(x^2 - 6x + 5) \pm (-3x^2 + 5x - 9)$

2- $(5y^3 + 3y - 7) \pm (4y^2 - 3y + 7)$

3) عملية الضرب

تختلف عملية الضرب لكثير الحدود عن عملتى الجمع والطرح ففى حالة ضرب كثيرات الحدود يتم إستخدام خاصية التوزيع لإيجاد ناتج عملية الضرب ولنعطى مثالاً توضحياً

يعطى حاصل الضرب لكثيرتى الحدود التاليتين على الصوره

$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$

$$g(x) = x + 4$$

$$f(x) \times g(x) = (x^2 + 4x - 3) \times (x + 4)$$

$$= x(x^2 + 4x - 3) + 4(x^2 + 4x + 3)$$

$$x^3 + 4x^2 - 3x + 4x^2 + 8x + 12$$

وبتجميع الحدود المتشابهه

$$x^3 + 8x^2 + 5x + 12$$

3.2) خواص العمليات لكثيرات الحدود (الجمع والطرح و الضرب)

1- **الإبدال :** لأي كثيرةى حدود $f(x)$ و $g(x)$ يتحقق

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

$$f(x) \times g(x) = g(x) \times f(x)$$

2- **التجميع :** لأي كثيرات حدود $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ نجد أن

$$f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(c)$$

$$f(x) \times [g(x) + h(x)] = [f(x) \times g(x)] \times h(c)$$

3- التوزيع : لأي كثيرات حدود $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ يتم توزيع عملية الضرب على عمليتى الجمع والطرح كما يلى

$$[f(x) \pm g(x)]h(c) = f(x)h(c) \pm g(x)h(x)$$

$$h(x) \times [f(x) \pm g(x)] = h(x) \times f(x) \pm h(x).\times g(x)$$

4- لأي كثيرةى حدود $f(x)$ و $g(x)$ يوجد كثيرة حدود $h(x)$ يحقق المساواة التالية

$$f(x) = g(x) \pm h(x)$$

4) قسمة كثيرات الحدود

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ كثيرةى حدود بحيث أن $g(x) \neq 0$ و درجة كثيرة الحدود $f(x)$ أكبر أو تساوي درجة كثيرة الحدود $g(x)$ فإنه ينتج عن قسمة $f(x)$ على $g(x)$ كثيرةى حدود $h(x)$ و $R(x)$ على الصوره

$$f(x) = g(x)h(x) + R(x)$$

حيث $h(x)$ و $R(x)$ يتعينان بشكل وحيد . و درجة كثيرة الحدود $R(x)$ أصغر من درجة كثيرة الحدود $g(x)$.

و نسمي كثيرة الحدود $f(x)$ بالمقسوم و كثيرة الحدود $g(x)$ بالقاسم (أو المقسوم عليه) و كثيرة الحدود $h(x)$ بحاصل القسمة و كثيرة الحدود $R(x)$ بالباقي القسمة .

ويمكننا تخليص الخطوات اللازمة لإجراء عملية قسمة كثيرات الحدود كما يلى

لنفرض أن لدينا كثيرةى الحدود $f(x)$ و $g(x)$ والمطلوب إيجاد خارجة قسم كثيرة الحدود $f(x)$ على كثيرة الحدود $g(x)$

1- قسمة الحد الأول من $f(x)$ على الحد الأول من $g(x)$
2- نضرب الناتج من الخطوة السابقة فى جميع حدود $g(x)$
3- نطرح الحدود المتشابهة ونجمع الحدود الغير متشابهة
4- نكرر الخطوات السابقة حتى تنتهى عملية القسمة

مثال : إذا كان

$$f(x) = 6x^4 + x^3 + 5x^2 + 6$$

$$g(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 2$$

أوجد حاصل قسمة $f(x)$ على $g(x)$

الحل :

$$3x + 2$$

$$2x^3 - x^2 - 2x + 2 \;\Big|\; 6x^4 + x^3 - 5x^2 + 6$$

$$6x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x$$

$$4x^3 + x^2 - 6x + 6$$

$$4x^3 - 2x^2 - 4x + 4$$

$$3x^2 - 2x + 2$$

ومن ثم فإن ناتج حاصل قسمة يكون

$$f(x) = g(x)\,h(x) + R(x)$$

$$f(x) = (2x^3 + x^2 - 2x + 2)(3x + 2) + 3x^2 - 2x + 2$$

الخواص الأساسية لقسمة كثيرات الحدود

1- إذا كان $f(x)$ تقبل القسمة على $g(x)$ و $g(x)$ تقبل القسمة على $h(x)$ فإن $f(x)$ تقبل القسمة على $g(x)$.

2- إذا كانت $f(x)$ تقبل القسمة على $g(x)$ و $g(x)$ تقبل القسمة على $f(x)$ فإن العلاقة التالية محققة

$$f(x) = c \times g(x) \qquad c \neq 0$$

والعكس أيضاً صحيح فإذا تحققت العلاقة السابقة فإن كلاً من $f(x)$ و $g(x)$ يقبل القسمة على الآخر.

3- إذا كانت $f(x)$ تقبل القسمة على $g(x)$ فإن جداء (أى حاصل ضرب) $f(x)$ بأى كثيرة حدود أخرى يقبل القسمة على $g(x)$.

4- إذا كان كلاً من $f_1(x)$ و $f_2(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ فإن حاصل جمعهما وحاصل طرحهما وجدائهما يقبل القسمة على $g(x)$.

5- كل كثيرة حدود تقبل القسمة على كثيرة حدود من الدرجة الصفر أي تقبل القسمة على عدد $c \neq 0$.

6- إذا كان $f(\text{x})$ يقبل القسمة على $g(x)$ فإن $c.f(x)$ يقبل القسمة على g(x) حيث $c \neq 0$.

(4.2) تحليل المقادير الجبرية

يعنى تحليل مقدار ما إعادة كتابته كحاصل ضرب لعدد من العوامل الأوليه والتى لا يمكن تحليها لعوامل أبسط منها.

أ) قواعد التحليل

1- بإستخدام العامل المشترك

العامل المشترك هو العدد أو المتغير الموجود فى كل حد من حدود المقدار الجبرى ونستطيع قسمة كل حدود المقدار عليه ويكون خارج القسة بدون باقى.

2- الفرق بين مربعين

إذا كان لدينا مقداراً جبرياً عبارة عن فرق بين مربعين كما يلى

$$x^2 - y^2$$

ويتم التحليل طبقاً لما يلى

$(\text{الأول})^2 - (\text{الثانى})^2 = (\text{الأول} + \text{الثانى})(\text{الأول} - \text{الثانى})$

ومن ثم فإن

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

3- الفرق بين مكعبين

إذا كان المعطى مقداراً جبرياً معبراً عن الفرق بين مكعبيين كالأتى

$$x^3 - y^3$$

فإن تحليل هذا المقدار يجرى على الصورة

$(\text{الأول})^3 - (\text{الثانى})^3 = [(\text{الأول})^2 + (\text{الأول})(\text{الثانى}) + (\text{الثانى})^2](\text{الأول} - \text{الثانى})$

ومن ثم فإن

$$x^3 - y^3 = (x^2 + xy + y^2)(x - y)$$

4- مجموع مكعبين

أم فى حالة مجموع مكعبين أى إذا كان لدينا مقدرا ما على الصورة

$$x^3 + y^3$$

فإننا نقوم بتحليل ذلك المقدار على الصورة

(الأول)^3+ (الثانى)^3 = [((الأول)^2 +(الأول)(الثانى) +(الثانى)^2](الأول + الثانى)

5- المربع الكامل

فى حالة ما إذا كان لدينا مربع كامل على الصورة

$$(x+y)^2$$

فإن التحليل لهذا المقدار يوضع على الصورة

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

ب) تحليل المقدار الثلاثى

المقدار الثلاثى هو ذاك المقدار الذى يمكن وضعه على الصورة

$$ax^2 + bx + c$$

ويجرى التحليل لذلك المقدار كما يلى

أولا: إذا كان

$$a = 1$$

فإن مثل هذه القادير يتم تحليها بمجرد النظر حيث نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوى c ومجموعهما يساوى b

ثانياً: إذا كان

$$a \neq 1$$

فيجب فى مثل تلك الحالة اللجوء إلى تحليل المقدار بطريقة إستخدام المقص

مثال: حلل المقادير الجبرية الآتية

-1

$$x^2 - 15x - 36 = 0$$

-2

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

الحل:

1- نبحث عن عددين حاصل ضربهما (-36) ومجموعهما (-5) وهما العددان (4) و (-9).

إذا يمكننا تحليل ذلك المقدار على الصورة

$$(x-9)(x+4) = 0$$

إذن

$$x = 9, \qquad x = -4$$

5.2) تحليل كثيرات الحدود

1- التحليل بواسطة العامل المشترك

يمكن كتابة مجموع كثيرة حدود لها عامل حسب القاعدة التالية

$$ax + ay + az = a(x + y + z)$$

2- التحليل بواسطة المتطابقات

فيما يلى بعض المتطابقات الشهيرة لتحليل كثيرات الحدود

i- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ii- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

iii- $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$

iv- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$

v- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2$

vi- $a^3 + b^3 = (a+b) \times (a^2 - ab + b^2)$

vii- $a^3 - b^3 = (a-b) \times (a^2 + ab + b^2)$

الباب الثالث

نظرية الزمره

الباب الثالث

نظرية الزمره

نظرية الزمر نشأت على يد إيفاريست جالوا في عام 1830 ، و هي تهتم أساسا بمشكلة إيجاد متى تكون كثيرة الحدود أو المعادلة الجبرية قابلة للحل أي لها حلولا أو جذور . قبل هذه النظرية كانت الزمر تدرس أساسا ضمن إطار دراسة طرق الترتيب.

1.3) تعريف الزمرة

الزمرة هي مجموعة G مزودة بعملية ثنائية و يمكننا التعبير عنها رياضياً كالآتى

$$a, b \to a * b: G \times G \to G \qquad (3.1)$$

بحيث تحقق عدة شروط بيانها كالاتى

1) التجميع (الإغلاق)

لكل $a, b, c \in G$ فإن

$$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad (3.2)$$

2) العنصر الحايد

يوجد عنصر محايد e حيث أن

$$a * e = e * a = a \qquad (3.3)$$

لكل $a \in G$

3) المعكوس

لكل $a \in G$ يوجد عنصر $a' \in G$ بحيث أن

$$a' * a = a * a' = 1 \qquad (3.4)$$

ويسمى العنصر a' بمعكوس العنصر a

4) الإبدال

إذا كانت العملية $*$ عملية تبادلية أى أنها تحقق الشرط

$$\forall\ (a, b) \epsilon G; a * b = b * a \qquad (3.5)$$

فإن الذمرة تسمى إبدالية

مثال (3-1): حدد ما إذا كان النظام $(R^n, \oplus)$ يشكل زمرة ابدالية، حيث أن العملية $\oplus$هي عملية جمع معرفة علىR^n بالعلاقة التالية

$$(x \oplus y) = (x_1 + y_1, \dots \dots x_n + y_n), \quad \forall x, y \epsilon R^n$$

الحل

لتحقق من أن النظام $(R^n, \oplus)$ يشكل زمرة إبدالية من عدم سنقوم بدراسة شروط الزمرة والتحقق منها كما يلى

أ) شرط الإغلاق

من تعريف العملية $\oplus$ المذكور بالسؤال يتضح أن النظام $(R^n, \oplus)$ مغلق حيث نجد أن أى عنصرين من R^n هو عنصر وحيد ينتمى إلى R^n

ب) شرط الإبدال

النظام إبدالى حيث أنه من تعريف $\oplus$ على عملية الجمع نجد أن

$$\forall x, y \epsilon R^n: (x \oplus y) = (x_1 + y_1, \dots \dots x_n + y_n)$$

$$= (y_1 + x_1, \dots \dots y_n + x_n)$$

$$= \left(y_{1,} \dots \dots, y_n\right) \oplus (x_1, \dots \dots, x_n) = y \oplus x$$

ج) شرط الدمج

بفرض أن$Z\epsilon\ R^n$ عنصر اختياري فيكون التجميع كالتالي

$$(x \oplus y) \oplus z = (x_1 + y_1, \dots \dots x_n + y_n) \oplus (z_1, \dots \dots, z_n) = x \oplus (y \oplus z)$$

ومن ثم نجد أن النظام قيد الدراسة دامج أى محققاً لخاصية الدمج.

د) العنصر الحايد

بفرض أن $e\epsilon R^n$ عنصراً محايداً منتمياً للمنظومة قيد الدراسة فإن

$$x \oplus e = (x_1, \dots \dots, x_n) \oplus (e_1, \dots \dots, e_n) = (x_1 + e_1, \dots \dots x_n + e_n)$$

$$= (x_1, \dots \dots, x_n)$$

ومن ثم نجد أن

$$x_1 + e_1 = x_1 \Leftrightarrow e_1 = 0 \quad \forall\ i = 1, 2, \dots . n$$

ذ) شرط المعكوس

لنفرض أن

$$x^{-1} \epsilon R^n$$

معكوساً للمعامل x فيكون لدينا

$$x \oplus x^{-1} = (x_1, \dots \dots, x_n) \oplus (x_1^{-1}, \dots \dots, x_n^{-1}) = x_1 \oplus x_1^{-1}, \dots \dots x_n \oplus x_n^{-1}$$

$$= (0, \dots \dots, 0)$$

ومن ثم نجد

$$x_i + x_i^{-1} = 0 \Leftrightarrow x_i = x_i^{-1}$$

إذن يمثل العنصر$(-x_{1,} \dots \dots ., -x_n)$ $x^{-1} =$ نظيرا للعنصر $x\epsilon R^n$

مما سبق يتضح أن النظام قيد الدراسة $(R^n, \oplus)$ يمثل زمرة إبدالية نظراً لتحقيقة كافة الشروط الخاصة بذالك.

2.3) الزمرة المنتهية

يقال عن زمرة $(G,*)$ أنها زمرة منتهية إذا كانت G مجموعة منتهية. ويسمى عدد العناصر $|G|$ برتبة الزمرة وبالعكس فإن الزمره $(G,*)$ غير منتهيه إذا كانت G مجموعة غير منتهية.

3.3) الزمرة الجزئية

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة G فيقال أن المجموعة A هى زمرة جزئية من G إذا كان $(A,*)$ زمره أى أن A تحقق الشروط الآتية

1. لكل $a, b \epsilon A$ يوجد $a * b \epsilon A$ (خاصية الإنغلاق)
2. لكل $a \epsilon A$ يوجد $a^{-1} \epsilon A$ (خاصية المعكوس)
3. يوجد عنصر e بحيث $a * e = a$ (خاصية المحايد)

ويقال حينها بأن

$$(A,*) \subset (G,*)$$

خاصيات هامه

1) لكل زمرة $(G,*)$ زمرتان جزئيتان على الاقل هما $(G,*)$ و $(e,*)$.
2) أي زمرة جزئية A من G لها نفس العنصر المحايد للزمره G.
3) معكوس العنصر a في الزمرة الجزئية A هو نفسه معكوس العنصر a في الزمرة G.
4) إذا كان A و B زمرتان جزئيتان من G فإن $A \cup B$ يشكل زمرة جزئية من G.

5) اذا كانت G زمرة و A مجموعة جزئية غير خالية من G فإن الزمرة الجزئية $< A >$

منG تسمى بالزمره الموَلَدة بـ(A) والمجموعة A تسمى المجموعة المولِدة للزمره $< A >$.

وإذا كان $G =< A >$ فإننا نقول أن G زمره مولَدة بـ (A). وإذا كان لدنيا A مجموعة منتهية فإننا نقول أن G زمرة منتهية التوليد ومولَدة بـ (A).

6) يقال أن الزمره دائرية إذا كانت مولده بعنصر واحد من عناصرها.

أى أن

إذا كان $a \in G$ فإن $< a >$ هى زمره دائرية مولده بالعنصر a إذا كان وكان فقط

$$G =< a \geq \{a^n | n \in Z\} \qquad (2.5)$$

فإننا نقول أن G زمرة دائرية مولده بالعنصر a

7) كل زمرة جزئية من زمرة دائرية هى عبارة عن زمرة دائرية.

8) يقال أن الزمرة G زمرة دورية إذا كان كل عنصر فيها له رتبة منتهية وعلى النقيض فإذا كانت رتبة كل عنصر (عدا المحايد) غير منتيه تسمى الزمرة بالغير منتهية.

9) زمرة خارج القسمة : إذا كانت $A \leq G$ وكانت $G/_A = \{aA : a \in G\}$ فإن خارج قسمة $\frac{G}{A}$ تسمى زمرة خارج القسمة.

مثال (3-2): إذا كانت $G = (z^*, \oplus)$ إدرس كون الزمرة G دائرية من عدمه

الحل

تمثل G زمرة دائرية مولدها العنصر 3 نظراً لأن

$$3^1 = 3, 3^2 = 2, 3^3 = 6, 3^4 = 4, 3^5 = 5, 3^6 = 1$$

4.3) التشاكل الزمرى

التشاكل هو نوع خاص من الدوال يحافظ على البنية الجبرية من جهة وع لى العمليات من جهة أخرى كما انه يستخدم للمقارنة بين الزمر. ويعرف التشاكل الزمرى كالآتى

إذا كان G و A زمرتين و $f: G \rightarrow A$ تطبيقاً بحيث $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$ لكل g_1, g_2 فإن f يسمى تشاكلا زمرياً

5.4) الزمرة الناظمية

لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G نقول أن H زمرة جزئية ناظمية من G إذا كان

$$ghg^{-1} \in H \qquad (2.6)$$

لكل $g \in G, \quad h \in H$

وتكتب

$$H \nabla G \qquad (3.6)$$

للتعبير عن أن H زمرة جزئية من G

خاصيات هامه :

1. كل زمرة ناظمية من نفسها $G \lhd G$.
2. $G \lhd \{e\}$ حيث e المحايد.
3. إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة ابدالية G فإن H زمرة ناظمية وذلك لأن

$$ghg^{-1} = g * (h * g^{-1}) = g * (g^{-1} * h) = (g * g^{-1}) * h = e * h \in H$$

الباب الرابع
المحددات و المصفوفات

الباب الرابع

المحددات و المصفوفات

تلعب المصفوفات والمحددات دوراً هاماً ورئيسياً فى التعبير عن العلاقات الرياضية ذات المتغيرات المتعددة بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالى وضع الحلول لهذه العلاقات. وللمصفوفات والمحددات أهمية قصوى فى العديد من العلوم مثل الفيزياء والكيمياء والاقتصاد والإحصاء وغيرها من العلوم الأخرى. ومن ثم فإننا سوف نتناول فى هذا الفصل بعض المفاهيم والتعاريف الهامة وأنواع المصفوفات ثم ننتقل إلى جبر المصفوفات والمحددات (الجمع والطرح والضرب).

1.4) المصفوفات

تعرف المصفوفة على حقل (F) بأنها عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة فى شكل صفوف وأعمدة وموضوعة داخل قوسين ويشار إلى المصفوفة عادة كالآتى :

$$A = [a_{ij}]$$

والتى تعنى العناصر فى الصف (i) والعناصر فى العمود (j)

ويمكننا أيضاً كتابة الشكل العام للمصفوفة على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

و تسمى ألأعداد داخل المصفوفة بعناصر المصفوفة وتكون مرتبة فـي أسطر أفقية تسمى صفوف المصفوفة وأسطر رأسية تسمى أعمدة المصفوفة.

وتتحدد درجة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة التى تحتويها. فإننا نقول إن درجة مصفوفة ما هى m في n ونكتب m×n، إذا كان عدد صفوفها m وعدد أعمدتها n .

مثال (1): إكتب المعادلة الآتية على صورة مصفوفة

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j} \qquad For \;\; 1 \le i \le 3, \qquad 1 \le j \le 4$$

الحل :

المعادلة المعطاة تمثل مصفوفة عدد صفوفها (3) وعدد أعمدتها (4) أى أنها مصفوفة من النوع (4×3)

وتكتب على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

مثال (2): حدد رتبة المصفوفات الآتية

1- $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة من الدرجه (2×3)

2- $Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة من الدرجه (3×2)

3- $Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة من الدرجه (4×1)

4- $T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n & t \\ x & y & z \end{bmatrix}$ مصفوفة من الدرجه (3×3)

2.4) العمليات على المصفوفات

1- تساوى مصفوفتان

يقال أن المصفوفتان A و B متساويتان إذا لهما نفس الحجم والعناصر المقتابلة بهما متساوية

أى أن

$$A, B \in M_{m+n}(F) \; and \; A = [a_{ij}], \qquad B = [b_{ij}]$$

فإن

$$[A] = [B] \; if \; a_{ij} = b_{ij}$$

حيث

$$1 \leq i \leq m, \qquad 1 \leq j \leq n$$

2- جمع وطرح المصفوفات

يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح على المصفوفات ، ويشترط لجمع أو طرح المصفوفات أن تكون من نفس الدرجة على أن يتم جمع العناصر المتناظرة أو طرجها جمعاً أو طرحاً جبرياً.

إذا كان لدينا المصفوفتان

$$A = [a_{ij}], \qquad B = [b_{ij}]$$

لهما نفس الحجم فإن

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = a_{ij} + b_{ij}$$

على أن يتم جمل كل عنصر بالمصفوفة A على مقابلة بالمصفوفة B

مثال (3): إذا كان لدينا المصفوفات التالية

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2- & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1- & 1 \end{bmatrix} ، \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3- & 1 \\ 8 & 1- & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} ، \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2- \\ 9 & 0 & 3- \\ 6 & 2 & 1- \end{bmatrix}$$

فأوجد

$$A + B, \qquad A - B$$

الحل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5- & 6 \\ 12 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B - C = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2- \\ 9 & 0 & 3- \\ 6 & 2 & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4- & 3 \\ 1- & 1- & 3 \\ 3- & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

وتعتبر عملية جمع المصفوفات عملية تبادلية وتجميعية أى أن

$$A + B = \mathrm{B} + \mathrm{A}$$

$$B + (A + B) = (\mathrm{B} + \mathrm{A}) + B$$

3- ضرب المصفوفات

تنقسم عملية الضرب فى المصفوفات إلى قسمين مختلفين فإما أن تكون العملية عبارة عن ضرب كمية قياسية فى مصفوفة أو ضرب مصفوفة بأخرى ويشترط بالحالة الأخيرة أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية والمصفوفة الناتجة تكون فى هذه الحالة من الدرجة (عدد صفوف الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية).

لنفرض أن لدينا المصفوفتان

$$A = [a_{ij}]$$

ذات حجم $m \times n$

و

$$B = [b_{jk}]$$

ذات حجم $n \times P$

ولدينا كمية قياسية $t \in F$

فإن

$$tA = t[a_{ij}] = ta_{ij}$$

و

$$AB = [a_{ij}][b_{jk}]$$

سيعطى المصفوفة

$$C = [c_{ik}]$$

من النوع $m \times P$

حيث

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{1n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{21} \times b_{12} & a_{11} \times b_{21} + a_{21} \times b_{22} \\ a_{12} \times b_{22} + a_{21} \times b_{22} & a_{12} \times b_{21} + a_{22} \times b_{22} \\ a_{13} \times b_{11} + a_{23} \times b_{12} & a_{13} \times b_{21} + a_{23} \times b_{22} \end{bmatrix}$$

خاصية :

حاصل ضرب(قسمة) مصفوفة ما فى (على) عدد حقيقى هو مصفوفة من الرتبة نفسها وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب (قسمة) العدد الحقيقى فى العنصر الموافق له من المصفوفة.

خاصية :

حاصل ضرب صف فى عمود له نفس عدد العناصر هو مجموع حواصل ضرب كل عنصر من الصف فى العنصر الوافق له من العمود .

مثال:

$$1\text{-}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$2\text{-}\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

3- $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}$

4- $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\end{bmatrix}$

5- $\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix}3 & 2\\5 & -1\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}4 & -1\\6 & -2\end{bmatrix}$$

الحل:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix}3 & 2\\5 & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4 & -1\\6 & -2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(3 \times 4) + (2 \times 6) & (3 \times -1) + (2 \times -2)\\(5 \times 4) + (-1 \times 6) & (5 \times -1) + (-1 \times -2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}12 + 12 & -3 - 2\\20 - 6 & -5 + 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24 & -5\\14 & -3\end{bmatrix}$$

مثال : إذا كان لدينا المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 2\\6 & 5\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}0.5 & 1\\0 & -2\\3 & 0.4\end{bmatrix}$$

فأوجد ما يلى

i- $3A$ ii- $-A + 2B$ iii- $\frac{B}{-2}$

الحل

i- $3A = 3 \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}$

ii- $-A + 2B = -1 \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0.4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 6 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -6 \\ 0 & -4.2 \end{bmatrix}$$

iii-

$$\frac{B}{-2} = \frac{\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0.4 \end{bmatrix}}{-2} = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 \\ 0 & -1 \\ -1.5 & -0.2 \end{bmatrix}$$

مثال :إحسب ما يلى

i- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$ ii- $B = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

الحل

i- $A = 1 \times (-3) + (-2) \times 1 + 0 \times 4 + (0.3) \times 10 = -2$

ii- لا يمكن إجراء عملية الضرب فى تلك الحالة لأن عدد عناصر غير متساوى

3.4) أنواع المصفوفات

يطلق على المصفوفات مسميات تتناسب مع شكلها الناتج عن عدد صفوفها وأعمدتها ويمكن تقسيم

أنواع المصفوفات كالآتى

- **المصفوفة المربعة**

هى مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد أعمدتها ولذلك فهى تكون من الرتبة (2×2) أو (3×3)

أو (4×4) أو $(n \times m)$ ، حيث $n = m$ مثال ذلك:

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3- & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة مربعة تحتوى على ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة (مصفوفة مربعة من الدرجة (3×3)

- **المصفوفة المستطيلة**

هى مصفوفة عدد صفوفها لا يساوى عدد اعمدتها ومثال ذلك المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 5 \\ 1- & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

وتعبر المصفوفة السابقة عن المصفوفه المستطيلة لأنها تتكون من صفين وأربعة أعمدة.

ومن أمثلة المصفوفات المستطيلة؛ مصفوفة الصف الوحدة، مصفوفة العمود الواحد كما سنرى فى الفقرة التالية.

- **مصفوفة الوحدة (المحايدة)**

وهى مصفوفة مربعة الشكل كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسى يساوى الواحد الصحيح، وباقى عناصر المصفوفة أصفار. ويرمز لها بالرمز I وفيما يلى أمثلة لمجموعة من مصفوفات الوحدة بأحجام مختلفة :

$I = [1]$ ويرمز لها بالرمز I_1

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ويرمز لها بالرمز I_2

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ويرمز لها بالرمز I_3

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ويرمز لها بالرمز I_4

ومن أهم خصائص مصفوفة الوحدة أنها عنصر حيادى فى عملية ضرب المصفوفات أى أن حاصل ضرب أى مصفوفة A فى مصفوفة الوحدة يساوى تلك المصفوفة (A).

مثال: إحسب ناتج ضرب المصفوفات الآتية

$$1\text{- } A = \begin{bmatrix} 21 & 2 & 13 \\ 0 & -13 & 15 \\ 11 & 22 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 2 & 13 \\ 0 & -13 & 15 \\ 11 & 22 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 2 & 13 \\ 0 & -13 & 15 \\ 11 & 22 & 2 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة القياسية**

هى مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسى متساوية القيمة وباقى عناصرها أصفار فمثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قياسية من الدرجة (2×2)

$$B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

مصفوفة قياسية من الدرجة (3×2)

حيث k مقدار حقيقى، $k \neq 0$ وتجدر الإشارة هنا أن المصفوفة القياسية تساوى حاصل ضرب k فى مصفوفة الوحدة من نفس الدرجة ، مثال ذلك :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * 2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة القطرية**

هى مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسى مقادير حقيقية ليست بالضرورة متساوية. وعلى ذلك فإن كلاً من مصفوفة الوحدة والمصفوفة القياسية هى حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قطرية من الدرجة (3×3)

- **المصفوفة الصفرية**

هى مصفوفة جميع عناصرها أصفار وقد تكون المصفوفة الصفرية فى الصورة المربعة أو المستطيلة، ومثال ذلك

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **مصفوفة الصف الواحد**

وهى مصفوفة مستطيلة تحتوى على صف واحد وأى عدد من الأعمدة وأمثلة ذلك

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

مصفوفة صف من الدرجه (3×1)

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \end{bmatrix}$$

مصفوفة صف من الدرجه (5 ×1)

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots & x_{1n} \end{bmatrix}$$

مصفوفة صفمن الدرجة (n×1)

- **مصفوفة العمود الواحد**

وهى مصفوفة مستطيلة تحتوى على عدة صفوف وعمود واحد فقط وأمثلة ذلك :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

مصفوفة عمود واحد من الدرجة (3×1)

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$$

مصفوفة عمود واحد من الدرجة (1×n)

❖ مبدول المصفوفة

نحصل على مبدول المصفوفة بتبديل صفوفها بأعمدتها أى بجعل صفها الأول مكان العمود الأول وصفها الثانى مكان العمود الثانى وهكذا. فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن مبدول هذه المصفوفة A ويرمز له بالرمز A' يكون على الصورة الآتية

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ملاحظات : خصائص مبدول المصفوفة

إذا كان لدينا المصفوفات A ، B ، C فإن

$$(A')' = A$$

$$A' + B' + C' = (A + B + C)'$$

$$(A \times B \times C)' = A' \times B' \times C'$$

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

- ### المصفوفة المتماثلة

هى المصفوفة المربعة لو تم تدويرها لأعطت المصفوفة الأصلية ومثال ذلك

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6- & 7 & 5 \\ 1 & 6- & 3 \end{bmatrix}$$

مبدول المصفوفة السابقة

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6- & 7 & 5 \\ 1 & 6- & 3 \end{bmatrix}$$

من الواضح أن المصفوفة A تساوى مبدولها A' ومن ثم فإنه يمكننا القول بأن المصفوفة A مصفوفة متماثلة.

ملحوظة : عند إيجاد مبدول المصفوفة (A) فإننا نجد أن عناصر القطر الرئيسى لا تتغير ومن ثم فإنه يمكننا القول أن المصفوفة القطرية والمصفوفة القياسية ومصفوفة الوحدة والمصفوفة الصفرية المربعة جميعها مصفوفات متماثلة. وأيضاً يمكننا القول بأن المصفوفات المتماثلة تعطى معكوسات متماثلة.

❖ المرافق

لتكن A مصفوفة مربعة فان لكل عنصر من عناصرها مرافق A_{ij} حيث

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

❖ معكوس المصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة يحيث أن محددة المصفوفة لا تساوى الصفر$(\det(A) \neq 0)$ فان معكوس A و يُرمز له بالرمز A^{-1} يُحسب من القاعدة التالية. حيث يشير الرمز $(\det(A))$ إلى محددة المصفوفة وسنتطرق لشرح المحددات وخواصها بشئ من التفصيل فيما بعد.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

ملحوظة : حاصل ضرب المصفوفة A فى معكوسها A^{-1} يساوى الوحدة

أى أن

$$A.A^{-1} = 1$$

4.4) العمليات على المصفوفات

إذا كان لدينا المصفوفات الثلاث A, B, C والكمياتنا القياسيتان s, t فإن

1- $(A + B) + C = A + (B + C)$

2- $A + B = B + A$

3- $0 + A = A$

4- $(A) + (-A) = 0$

5- $(s \pm t)A = sA \pm tA$

6- $t(A \pm B) = tA \pm tB$

7- $s(tA) = (st)A$

8- $1A = A,\ 0A = 0,\ (-1)A = -A$

9- $tA = 0 \Longrightarrow t = 0\ or\ A = 0$

10- $(A + B)C = AC + BC$

11- $A(B + C) = AB + AC$

12- $t(AB) = (tA)B = A(tB)$

13- $A(-B) = (-A)B = -AB$

حيث أن المصفوفات A, B, C ذات أحجام $m \times n, n \times P, P \times q$ على التوالى

5.4) قوى المصفوفات

إذا كان لدينا المصفوفة A من النوع $n \times n$ فإننا سنعرف مصفوفة القوى كما يلى

$$A^0 = I_n \qquad A^{k+1} = A^k A, \quad k \geq 0$$

خصائص

1- $A^m A^n = A^{m+n}$

2- $(A^m)^n = A^{mn}$

3- $(AB)^n = A^n B^n$

4- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + A^2$

5- $(A+B)^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$

6- $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

4.4) القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان المتجه الغير صفري X يُسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A اذا كان AX مضاعفاً عددياً للمتجه X أي ان $AX = \lambda X$ حيث λ ان ثابت يُسمى القيمة الذاتية للمصفوفة A .

لايجاد القيم الذاتية للمصفوفة A نضع المعادلة $AX = \lambda X$ بالصورة

$$(\lambda I - A)X = 0$$

والتي لها حل غير صفري اذا وفقط اذا كان

$$det(\lambda I - A) = 0$$

5.4) حل المعادلات الخطية بإستخدام المصفوفات

إذا كان لدينا مجموعة من المعادلات على الصورة

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m$$

فإنه يمكن حل هذا النظام من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات كالآتى

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ونكتب على الصورة

$$A.X = Y$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ولحل هذا النظام نضرب طرفي المعادلة فى A^{-1}

$$A^{-1}.A.X = Y.A^{-1} \Rightarrow 1.X = Y.A^{-1}$$

$$X = Y.A^{-1}$$

6.4) المحددات

لتكن A مصفوفة مربعة من الشكل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فإن لتلك المصفوفة محددة ونرمز لها بالرمز $\det(A)$ أو $|A|$ أو ΔA وتحسب كما يلى

$$detA = \Delta A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ولكل محدد قيمة ولبيان كيفية إيجاد قيمة المحدد سنفرض أولا أن لدينا محدد من الدرجة (2×2)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21})$$

أما إذا كان المحدد من الدرجة الثالثة (3×3) فإن قيمته تحدد كالأتى

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \times a_{33} - a_{23} \times a_{32}) - a_{12}(a_{21} \times a_{33} - a_{23} \times a_{31}) + a_{13}(a_{21} \times a_{32} - a_{22} \times a_{31})$$

7.4) خواص المحددات

1- لا تتغير قيمة المحدد إذا استبدلت كل صفوفه بأعمدته

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2- إذا كان للمحدد صفان متساويان او عمودين متساويين فإنه تكون قيمة المحدد صفر

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3- ان تبديل مكانين صفين او عموديين في المحدد يكافئ ضربه في (-1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4- ضرب كل عناصر صف واحد او عمود واحد في أي عدد K يكافئ ضرب كامل المحدد في K

$$\begin{vmatrix} Ka_1 & b_1 & c_1 \\ Ka_2 & b_2 & c_2 \\ Ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5- إذا كانت كل عناصر صف ما أو عمود ما تساوي صفر فإن المحدد نفسه يساوي صفر

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

6- إذا كانت العناصر المناظرة لصفين أو عمودين متناسبة فإن المحدد يكون مساوي للصفر

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 10 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

7- إذا كان كل عنصر من عناصر العمود رقم (n) أو الصف رقم (n) المحدد عبارة عن مجموع حدين فإنه يمكن التعبير عن المحدد في صورة مجموع محددين يحتوي أحدهما في عموده في رقم(n) على الحدود الأولى من الحدود المذكورة سابقا والثاني على الحدود الثانية وتكون العناصر في باقي الاماكن في كل الحدود الثلاثة هي نفسها

$$\begin{vmatrix} 'a_1 + "a_1 & b_1 & c_1 \\ 'a_2 + "a_2 & b_2 & c_2 \\ 'a_3 + "a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 'a_1 & b_1 & c_1 \\ 'a_2 & b_2 & c_2 \\ 'a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} "a_1 & b_1 & c_1 \\ "a_2 & b_2 & c_2 \\ "a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

8- إذا اضيفت الى عناصر عمود أو صف العناصر المناظرة في عمود آخر أو في صف آخر مضروبة في أي عامل مشترك فإن قيمة المحدد لا تتغير

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 + kb_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 + kb_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix}$$

9- إذا كانت A مصفوفه قطريه أو مثلثيه عليا أو فإن محدد A هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن المحدد

$$|A| = 1(3)(2) = 6$$

إشارة المحدد

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

8.4) قاعدة كرامر

إذا كانت قيمة المحدد لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفراً فإن للنظام حلاً وحيداً وإذا كانت قيمة المحدد صفراً فإما أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول أو لا حل وهناك طريقة لحل المعادلات الخطية و تسمى قاعدة كرامر .

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

فعلى سبيل المثال يمكننا إيجاد حل مجموعة من المعادلات بإستخدام قاعدة كرامر كما يلى

إذا كان

$$5x - 6y = 15$$

$$3x + 4y = -29$$

فإننا

نقوم بإيجاد محددة Δ لتلك المعادلات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - 3(-6) = 20 + 18 = 38$$

ثم نقوم بإيجاد Δx و x

نعوض عن العمود x في المحدد بالحدود المطلقة فى المعادلتين المراد حلهما 29- , 15

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix} = 15(4) - (-29)(-6) = 60 - 174 = -114$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-114}{38} = -3$$

نقوم بإيجاد Δy و y

بالمثل نعوض عن العمود y في المحدد بالحدود المطلقة 29- , 15

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix} = 5(-29) - 3(15) = -145 - 45 = -190$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-190}{38} = -5$$

نحل المعادلات بالتعويض عن قيمة x و y

$$5(-3) - 6(-5) = 15$$

$$3(-3) + 4(-5) = -29$$

مثال: إحسب مقلوب المصفوفات الآتية

1- $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ 2- $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 3- $Z = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

الحل:

1- محددة المصفوفة (X) لا يساوى الصفر ومن ثم فإن مقلوبها يحسب كما يلى

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -(-1) \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -(-1) \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$$

2- محددة المصفوفة (Y) لا يساوى الصفر إذن

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}{-2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

3- محددة المصفوفة (Z) يساوى الصفر ومن ثم فإننا لا يمكن إيجاد المقلوب لها.

تمارين :

1- إذا كان لدينا مجموعة المصفوفات الآتية

$$1\text{- } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2\text{- } B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$3\text{- } C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$4\text{- } D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

فإحسب ما يلى إن أمكن

1- $A \times B$,   2- $A + B + C$ 3- $A(B + C)$

4- $-2A + 3D$ 5- $C + B'$ 6- $3(A' + I + C)$

حيث تمثل I مصفوفة الوحدة

2- إحسب قيمة المحددات الآتية

1- $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

2- $\begin{vmatrix} 11 & 25 \\ -12 & 3 \end{vmatrix}$

3- $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

4- $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ -13 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

3- إذا كان لدينا المصفوفة التالية

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

فإحسب ما يلى

1- $\det(X)$ 2- $\det(X^2)$ 3-$\det(X^3)$

4- إحسب مقلوب المصفوفات الآتية

1- $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

2- $B = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5- إذا كان لدينا المصفوفات الآتية

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

فإحسب ما يلى

1- $P = 2A + B^2$

2- $AQ + BQ = I$

3- $C = RA$

الباب الخامس

التحليل الإتجاهى

الباب الخامس

التحليل الإتجاهى

1.5) المتجهات

يمكن تقسيم الكميات الفيزيائية إلى قسمين :

أ) **الكميات القياسية :** وتتميز بأن لها مقدار وليس لها إتجاه مثل الطاقة ودرجة الحرارة والكتلة والطول.

ب) **الكميات المتجهة :** وهي كميات فيزيائية تتميز بأن لها مقدار وإتجاه مثل الإزاحة والسرعة والعجلة والقوة وغيرها ويرمز للكميات المتجهة بالرمز $\overline{A}$ أو $\vec{A}$ ويتألف المتجه من مركبات في إتجاه محاور الإحداثيات المستخدمة ففي الإحداثيات الكارتيزية يكون للمتجه ثلاث مركبات ويكتب على الصورة

$$\overline{A} = A_1\overline{i} + A_2\overline{j} + A_3\overline{k} \qquad or \qquad \overline{A} = A_1\overline{e}_x + A_2\overline{e}_y + A_3\overline{e}_z$$

كما يمكن التعبير عن مقدار المتجه بالعلاقة

$$|\overline{A}| = mod\ \overline{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

ويعرف متجه الوحده على الصوره

$$\overline{e}_A = \frac{\overline{A}}{|\overline{A}|}$$

وفي الإحداثيات الكارتيزية نرمز لمتجه الوحده في اتجاه المحاور (i, j, k) وإذا كانت القيمة العددية للمتجه تساوي صفر سمي المتجه بالمتجه الصفري ويكون ليس له إتجاه وعندما يتم تحديد موضع المتجه بالنسبة لنظام إحداثيات معين تكون النقطة $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ نقطة إحداثياتها $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ ويكون المتجه لهذه النقطة هو

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$$

$$|\overline{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.5) بعض أساسيات جبر المتجهات

1. يقال أن المتجهين متساويان إذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه بصرف النظر عن نقطة البداية لكل منهما .

2. مجموع متجهين هو متجه رأسه بداية المتجه الأول وذيله نهاية المتجه الثاني.

3. المتجه $\overline{A} - \overline{A}$ متجه صفري .

4. عند ضرب قيمة عددية P في متجه $\overline{A}$ نحصل على متجه له قيمة عددية $P\overline{A}$ وتعطي متجه له قيمة عددية P من المرات من المتجه الأصلي وفى نفس الإتجاه وإذا ضربنا المتجه في P – يكون بعكس الإتجاه وإذا ضربنا المتجه في صفر نحصل على المتجه الصفري .

3.5) بعض قوانين جبر المتجهات

1. قانون التبادل

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{B} + \overline{A}$$

$$p(q\overline{A}) = (pq)\overline{A} = (qp)\overline{A}$$

2. التجميع

$$(\overline{A} + \overline{B}) + \overline{C} = \overline{A} + (\overline{B} + \overline{C})$$

3. التوزيع

$$(p + q)\overline{A} = p\overline{A} + q\overline{A}$$

$$p(\overline{A} + \overline{B}) = p\overline{A} + p\overline{B}$$

4.5) المجالات

إذا كان هناك منطقة ما تحيط بمركز دراسة سواء كان شحنة أو مغناطيس أو جسما آخر بحيث يظهر تأثير مركز الدراسة خلالها فإن هذه المنطقة تسمى مجالا وتنقسم المجالات إلى نوعين مجالات قياسية ومجالات متجهة

1. **المجال القياسي :** وغالباً ما يمثل بدالة تتحدد عند كل نقطة في الفراغ بقيمتها فقط دون إتجاهها مثل دالة الجهد الكهربي لشحنة إستاتيكية

2. **المجال الإتجاهي :** ويمثل عادة بدالة تتحدد عند كل نقطة في الفراغ بقيمتها العددية وإتجاهها مثل السرعة وتسمى الدالة في هذه الحالة بالدالة المتجهة أو تسمى بمجال اتجاهي معرف على منطقة R مثال ذلك سرعة جسيم على الصورة

$$F(x,y,z) = x^2y\bar{i} + 3xyz\bar{j} + 4z\bar{k}$$

5.5) ضرب المتجهات

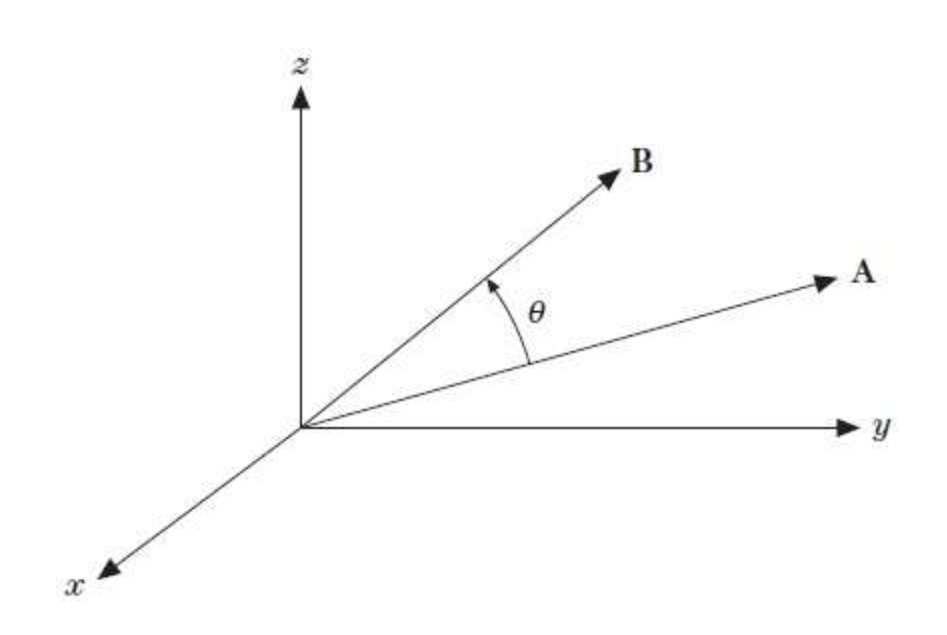
وهناك نوعان من ضرب المتجهات وهما الضرب القياسى والضرب الإتجاهى وسنقوم بشرحها بشئ من التفصيل فيما يلى

1- **الضرب القياسي :**

يعرف الضرب القياسى لمتجهين على الصورة

$$\bar{A} \circ \bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}| \cos\theta = AB\cos\theta$$

أي أن الضرب القياسي يساوي حاصل ضرب القيمة العددية للمتجه الأول في القيمة العددية للمتجه الثاني في جيب تمام الزاوية بينهما.



شكل (5-1): حاصل الضرب القياسى لمتجهين

ومن خصائص هذا النوع من الضرب

1. إن ناتج الضرب يكون كمية قياسية لها مقدار فقط .

2. إذا كان ناتج الضرب يساوي صفرا فهذا يعني إما أن أحدهما عمودي على الآخر أو أن أحدهما يساوي صفرا .

وهناك عدة قواعد لعمية الضرب القياسي أهمها ما يلى

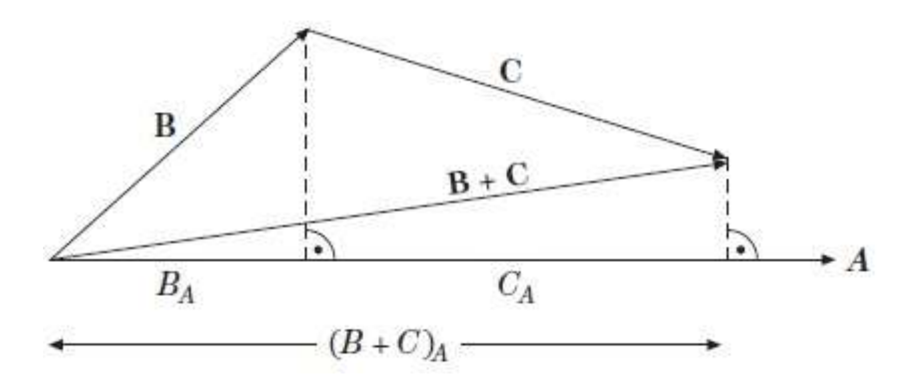
أ- خاصية التبديل

$$\overline{A} \circ \overline{B} = \overline{B} \circ \overline{A}$$

ب- خاصية التوزيع

$$\overline{A} \circ \left(\overline{B} + \overline{C}\right) = \overline{A} \circ \overline{B} + \overline{A} \circ \overline{C}$$

$$p\left(\overline{A} \circ \overline{B}\right) = \left(p\overline{A}\right) \circ \overline{B} = \overline{A} \circ \left(p\overline{B}\right)$$



شكل (2-5): خاصية التوزيع لحاصل الضرب القياسى

ج- متجه الوحدة فى الضرب القياسى

$$\overline{i} \circ \overline{i} = \overline{j} \circ \overline{j} = \overline{k} \circ \overline{k} = 1$$

$$\overline{i} \circ \overline{j} = \overline{j} \circ \overline{k} = \overline{i} \circ \overline{k} = 0$$

ويعطى حاصل ضرب المتجهان A وB فى المحاور الثلاث على الصوره

$$\overline{A} \circ \overline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

وقيمة مربع متجه الوحدة فى أى من المحاور يساوى الوحده أى أن

$$i^2 = j^2 = k^2$$

ومن ثم فإن مربع المتجه B على سبيل المثال فى المحاور الثلاث يعطى على الصوره

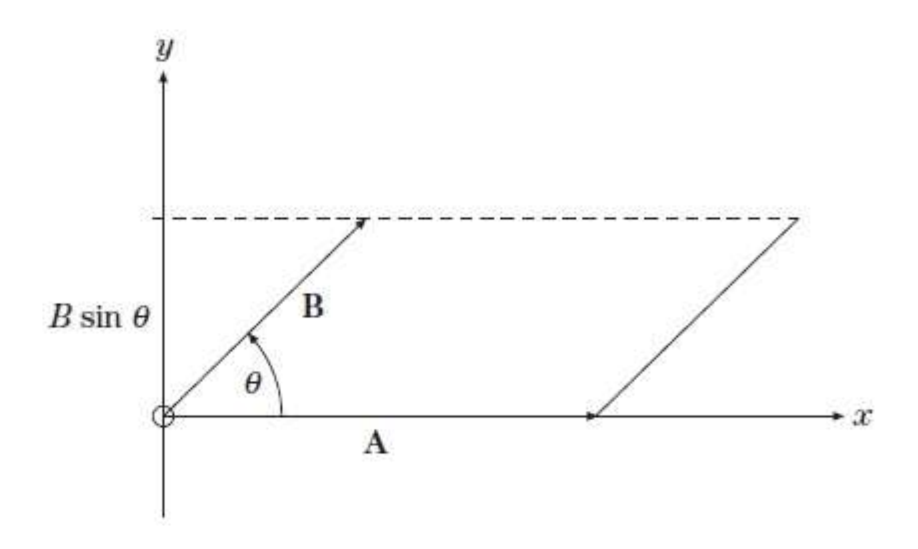
$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

2- **الضرب الاتجاهي**

يمكن تعريف عملية القرب الإتجاهى كالآتى

$$\overline{A} \wedge \overline{B} = AB \sin\theta \ \overline{n} \qquad 0 < \theta < \pi$$

ومن الناحية الهندسية تعني أنها مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه المتجهين A, B ضلعان متجاوران ، ويساوي الضرب الإتجاهى حاصل ضرب القيمة العددية لكل من المتجهين في جيب الزاوية بينهما في متجه الوحدة العمودي على المستوى الذي يوجد فيه المتجهان .



شكل (3-5): حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين

وهناك العديد من الخصائص والقواعد لعملية الضرب الإتجاهى أهمها ما يلى

أ- الإبدال

$$\overline{A} \wedge \overline{B} = -\overline{B} \wedge \overline{A}$$

$$\overline{A} \wedge \left(\overline{B} \wedge \overline{C}\right) = \overline{A} \wedge \overline{B} + \overline{A} \wedge \overline{C}$$

ب- التوزيع

$$p\left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right) = \left(p\overline{A}\right) \wedge \overline{B} = \overline{A} \wedge \left(p\overline{B}\right) = \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right)p$$

ح- متجه الوحدة فى الضرب الإتجاهى

$$\overline{i} \wedge \overline{i} = \overline{j} \wedge \overline{j} = \overline{k} \wedge \overline{k} = 0$$

$$\overline{i} \wedge \overline{j} = \overline{j} \wedge \overline{k} = \overline{i} \wedge \overline{k} = 1$$

$$\overline{A} \wedge \overline{B} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

وهناك عملية أخرى لعمليات ضرب المتجهات يمكن إضافتها وهى الضرب الثلاثى للمتجهات والتى يمكن تقسيمها أيضاً إلى نوعين وهما

1- **الضرب الثلاثي الاتجاهي**

يعرف الضرب الثلاثى الإتجاهى على الصوره

$$\overline{A} \wedge \left(\overline{B} \wedge \overline{C}\right) = \overline{B}\left(\overline{A} \circ \overline{C}\right) - \overline{C}\left(\overline{A} \circ \overline{B}\right)$$

2- **الضرب الثلاثي القياسي**

يعطى تعريف الضرب الثلاثى القياسى على الصورة

$$\overline{A} \circ \left(\overline{B} \wedge \overline{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

ويعني ذلك هندسيا حجم متوازي الأوجه الذي فيه A وB وC ثلاث أضلاع متجاورة ويجب أن نلاحظ فيه ضرورة إجراء الضرب الإتجاهى أولاً ثم بعد ذلك إجراء الضرب القياسى ويكون حاصل الضرب في هذه الحالة قياسياً أيضا.

مثال (1)

احسب المركبتين السينية والصادية للمتجهات التالية :

أ- متجه **A** قيمته 6 وحدات ويصنع زاوية مقدارها 240^o مع الاتجاه الموجب لمحور x

الحل:

y
A_x 240^o x
60^o
A
A_y

$$A_x = A \cos 240 = 6 \times (-1/2) = -3$$

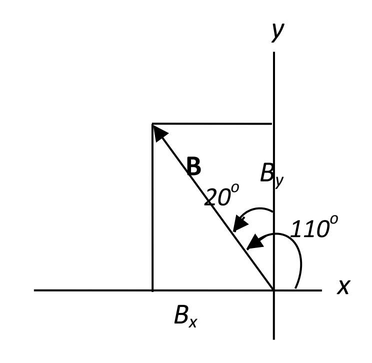
$$A_y = A \sin 240 = -5.2 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

ب- متجه **B** قيمته *5* وحدات و يصنع زاوية مقدارها 110^0 مع الاتجاه الموجب لمحور x

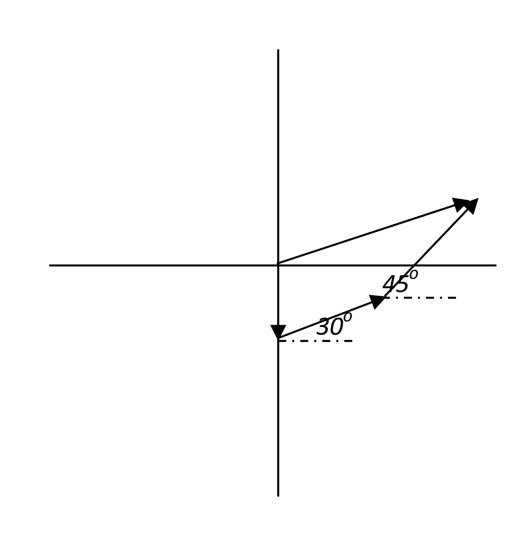
الحل:

$B_x = B \cos 110 = -1.7$

$B_y = B \sin 110 = 4.7$



مثال (2)



يخرج سائح من مدينة ما فيقطع مسافة *10 km* باتجاه الجنوب ، ثم يسير مسافة *15 km* باتجاه يصنع *30*° شمال شرق ثم يقطع مسافة *20 km* باتجاه الشمال الشرقي. ما هو موضع السائح بالنسبة لتلك المدينة ؟

الحل:

إن المسافات التي يقطعها السائح هي متجهات إزاحة لكل منها مقدار و اتجاه، فالمسألة هي جمع متجهات.

الرسم يوضح الحالات المتعاقبة لسير السائح و يوضح موقعه الحالي من المدينة والتي تمثل نقطة الأصل،

ولإيجاد قيمة واتجاه المحصلة (الموضع بالنسبة للمدينة) نعمل على تحليل الإزاحات الثلاثة في الاتجاهين السيني والصادي ثم نحسب المحصلة مقدارا واتجاها.

$$R_x = 0 + 15 \cos 30 + 20 \cos 45 = 15 \times 0.866 + 20 \times 0.707 = 27.13\ Km$$

$$R_y = -10 + 15 \sin 30 + 20 \sin 45 = -10 + 15 \times 0.5 + 20 \times 0.707 = 11.64\ Km$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(27.13)^2 + (11.64)^2} = \sqrt{736 + 135.5} = \sqrt{871.5} = 29.5Km$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{11.64}{27.13} = \tan^{-1} 0.429$$
$$\theta = 23.2^O$$

ملاحظة/ يمكن كتابة المحصلة بصورتها الاتجاهية كما يلي:

R = R_x ***i*** **+** R_y ***j*** *= 27.13* ***i*** *+ 11.64* ***j***

مثال (3): إذا كان

$$\overline{A} = \hat{e}_x + 4\hat{e}_y + 3\hat{e}_z$$
$$\overline{B} = 4\hat{e}_x + 2\hat{e}_y - 4\hat{e}_z$$

أثبت أن هذين المتجهين متعامدين

الحل:

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = 4 + 8 - 12 = 0 \Rightarrow \overline{A} \perp \overline{B}$$

مثال(4): برهن أن المتجهات الاتية لمثلث قائم

$$\overline{A} = 2\hat{e}_x - \hat{e}_y + \hat{e}_z$$
$$\overline{B} = \hat{e}_x - 3\hat{e}_y - 5\hat{e}_z$$
$$\overline{C} = 3\hat{e}_x - 4\hat{e}_y - 4\hat{e}_z$$

الحل:

$$|\overline{A}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$|\overline{B}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{30}$$

$$|\overline{C}| = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$$

$$|\overline{C}|^2 = |\overline{A}|^2 + |\overline{B}|^2 \Rightarrow$$

مثال (5): أذا كان

$$\overline{A} = 2\hat{e}_x + \hat{e}_y - \hat{e}_z$$

$$\overline{B} = \hat{e}_x - \hat{e}_y + 2\hat{e}_z$$

أوجد

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \quad , \overline{A} \times \overline{B}$$

ثم أوجد الزاوية بينهما بطريقة الضرب الأتجاهى والقياسى

الحل:

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = (2\hat{e}_x + \hat{e}_y - \hat{e}_z) \cdot (\hat{e}_x - \hat{e}_y + 2\hat{e}_z) = 2 - 1 - 2 = -1$$

$$\overline{A} \times \overline{B} = (2\hat{e}_x + \hat{e}_y - \hat{e}_z) \times (\hat{e}_x - \hat{e}_y + 2\hat{e}_z) =$$

$$\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{e}_x (2-1) - \hat{e}_y (4+1) + \hat{e}_z (-2-1) = \hat{e}_x - 5\hat{e}_y - 3\hat{e}_z$$

$$|\overline{A}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \qquad , |\overline{B}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{|A||B|} = \frac{-1}{6} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{6}) = 99.6^{0}$$

$$\sin\theta = \frac{|\overline{A}\times\overline{B}|}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{\sqrt{1+25+9}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{6} = 0.9860 \Rightarrow \theta = \sin^{-1} 0.986 = 99.6$$

مثال (6): أذا كان

$$\overline{A} = 2\hat{e}_x - 3\hat{e}_y + \hat{e}_z$$
$$\overline{B} = 3\hat{e}_x - 3\hat{e}_y - \hat{e}_z$$
$$\overline{C} = 4\hat{e}_x - 3\hat{e}_y + \hat{e}_z$$

أوجد

أ)

$$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C}), (\overline{A}\times\overline{B})\cdot\overline{C}$$

ب)

$$((\overline{A}\times\overline{B})$$

ج)

$$\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}), \overline{C}\times(\overline{A}\times\overline{B})$$

الحل:

أ)

$$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2(-3-3)+3(3+4)+1(-9+12)=-12+21+3=12$$

$$(\overline{A}\times\overline{B})\cdot\overline{C}=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=4(3+3)+3(-2-3)+1(-6+9)=24-15+3=12$$

ب)

$$(\overline{A}\times\overline{B})=\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}=6\hat{e}_x+5\hat{e}_y+3\hat{e}_z\Rightarrow(\overline{A}\times\overline{B})\cdot(\overline{A}\times\overline{B})=36+25+9=70$$

ج)

$$\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})=\overline{B}(\overline{A}\cdot\overline{C})-\overline{C}(\overline{A}.\overline{B})$$

$$=\overline{B}(8+9+1)-\overline{C}(6+9-1)=18\overline{B}-14\overline{C}$$

$$=-2\hat{e}_x-12\hat{e}_y-32\hat{e}_z$$

$$\overline{C}\times(\overline{A}\times\overline{B})=\overline{A}(\overline{C}\cdot\overline{B})-\overline{B}(\overline{C}\cdot\overline{A})$$

$$=\overline{A}(12+9-1)-\overline{B}(8+9+1)=20\overline{A}-18\overline{B}$$

$$=-14\hat{e}_x-6\hat{e}_y+38\hat{e}_z$$

مثال (6): أذا كان

$$\bar{A} = \hat{e}_x + \hat{e}_y$$
$$\bar{B} = 2\hat{e}_x - 3\hat{e}_y + \hat{e}_z$$
$$\bar{C} = 4\hat{e}_y - 3\hat{e}_z$$

فأوجد

أ) $\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})$

ب) $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}), (\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C}$

الحل:

أ)

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1(9-4) - 1(-6) + 0 = 11$$

ب)

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A}.\bar{B})$$
$$= \bar{B}(4) - \bar{C}(-1) = 8\hat{e}_x - 8\hat{e}_y - \hat{e}_z$$

$$(\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{A}(\bar{C} \cdot \bar{B}) - \bar{B}(C \cdot \bar{A})$$
$$= \bar{A}(-12 - 3`) - \bar{B}(4) = -15\bar{A} + 4\bar{B} = -15\hat{e}_x - 15\hat{e}_y + 8\hat{e}_x - 12\hat{e}_y + 4\hat{e}_z$$
$$= -7\hat{e}_x - 27\hat{e}_y + 4\hat{e}_z$$

6.5) تفاضل المتجهات

إذا كان لدينا المتجه $\overline{A}(x)$ يعتمد على كمية قياسية u فإن المشتقة التفاضلية $\frac{d\overline{A}}{du}$ تعرف على الصورة

$$\frac{d\overline{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \overline{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overline{A}(u + \Delta u) - \overline{A}(u)}{\Delta u}$$

ويكون ناتج عملية التفاضل للمتجه كمية متجهه

- **التفاضل الجزئي**

إذا كانت الدالة المتجهة دالة في أكثر من متغير أي أن $\overline{A} = \overline{A}(x, y, z)$ فإن

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial u} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \overline{A}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{A}(x + \Delta x, y, z) - \overline{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

وبالمثل يتم إجراء بقية المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرات الأخرى (y, z).

ويمكن كتابة التفاضل الجزئى للمتجه A على الصورة

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x} dx + \overline{\frac{\partial A}{\partial y}} dy + \overline{\frac{\partial A}{\partial z}} dz$$

وبالنسبة للدالة المتجهة يكون

$$\frac{d\bar{A}}{du} = \frac{\partial A_1}{\partial u} \bar{\imath} + \frac{\partial A_2}{\partial u} \bar{\jmath} + \frac{\partial A_3}{\partial u} \bar{k}$$

والمشتقة الثانية هي

$$\frac{d^2 \bar{A}}{du^2} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial u^2} \bar{\imath} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial u^2} \bar{\jmath} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial u^2} \bar{k}$$

❖ **بعض قواعد تفاضل المتجهات**

$$\frac{d}{du}(\varphi\bar{A}) = \varphi\frac{d\bar{A}}{du} + \frac{d\varphi}{du}\bar{A}$$

$$\frac{d}{du}(\bar{A}\circ\bar{B}) = \bar{B}\circ\frac{d\bar{A}}{du} + \frac{d\bar{A}}{du}\circ\bar{A}$$

$$\frac{d}{du}(\bar{A}\wedge\bar{B}) = \bar{B}\wedge\frac{d\bar{A}}{du} + \frac{d\bar{A}}{du}\wedge\bar{A}$$

$$\frac{d}{du}(\bar{A}+\bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{du} + \frac{d\bar{A}}{du}$$

$$\frac{d}{du}(\bar{A}\circ\bar{B}\wedge\bar{C}) = \bar{A}\circ\bar{B}\wedge\frac{d\bar{C}}{du} + \bar{A}\circ\frac{d\bar{B}}{du}\wedge\bar{C} + \frac{d\bar{A}}{du}\circ\bar{B}\wedge\bar{C}$$

$$d\bar{A} = \frac{d\bar{A}}{dx}dx + \frac{d\bar{A}}{dy}dy + \frac{d\bar{A}}{dz}dz$$

وتكون المشتقة التفاضلية للمتجه في اتجاه المماس ، فمثلا إذا كان r يمثل متجه الموضع للجسم فإن المشتقة التفاضلية $\frac{d\bar{r}}{dt}$ تكون هي السرعة ، وتكون في اتجاه المماس للمسار

❖ **الانحدار**

يعرف انحدار دالة قياسية F وهي دالة في $(x\,,y\,,z)$ بالعلاقة التالية :

$$\bar{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial F}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}$$

حيث

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$$

وبما أن $\bar{\nabla}F$ كمية متجهة لذلك فإن انحدار دالة قياسية F عند نقطة ما يعطي متجها له الخواص التالية :

1. مركباته عبارة عن معدلات تغير الدالة عبر اتجاهات محاور الإحداثيات
2. قيمة المتجه

$$|\overline{\nabla}F| = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}$$

هي أعلى معدل للتغير مع المسافة

3. اتجاهه هو اتجاه أعلى معدل للتغير من المسافة
4. يشير منحناه باتجاه القيم العظمى للدالة
5. ويعطى شكل المؤثر في الإحداثيات المختلفة على الصورة التالية

- الإحداثيات الكارتيزية

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$$

- الإحداثيات الاسطوانية

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\bar{e}_z$$

- الإحداثيات الكروية

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi$$

❖ **التدفق**

يعرف التدفق لكمية متجهة عبر سطح ما بالتالي

$$d\emptyset = \bar{B} \circ d\bar{A}$$

حيث المتجه $d\bar{A}$ متجه السطح وهو عمودي على السطح لذا فإن التدفق $d\emptyset$ هو مركبة المتجه العمودية على السطح مضروبة في متجه المساحة $d\bar{A}$ ولسطح ذي مساحة محددة يكون الفيض الكلي معرفا بالعلاقة

$$\emptyset = \oint \bar{B} \circ d\bar{A}$$

وللسطح المغلق فإن اتجاه $d\bar{A}$ يشير إلى خارج السطح أي أن الفيض الكلي يمثل معدل التغير الصافي للمتجه الذي يغادر السطح المقيد للحجم المحصور.

- **التباعد**

عندما يؤثر المؤثر $\bar{\nabla}$ على دالة متجهة فإن الناتج يسمى التفرق أو الانتشار، فإذا كانت $\bar{A}$ دالة متجهة تعتمد على متغيرات x , y , z فإن التباعد يكتب في هذه الحالة على الشكل

$$\bar{\nabla} \circ \bar{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \circ \left(A_x\bar{\imath} + A_y\bar{\jmath} + A_z\bar{z}\right)$$

$$\bar{\nabla} \circ \bar{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

ويمثل ذلك فيزيائيا مقدار ما يخرج من الكمية الفيزيائية التي يمثلها المتجه $\bar{\mathbf{A}}$ من أسطح وحدة الحجوم وفي الاتجاه العمودي على السطح .

- **الدوران أو الالتفاف أو الدوامة**

إذا كانت $\bar{A}$ دالة متجهة فإن الالتفاف لهذا المتجه يكتب على الصورة

$$curl\bar{A} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{\iota} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

كمثال على الالتفاف تيار السائل (سريان السائل) فبالقرب من قاع الجدول تتناسب سرعة السائل مع المسافة

من القاع فإذا كان الانسياب موازي لمحور z وكان محور x متعامدا مع قاع المجرى يكون

$$v_x = 0, \qquad v_y = 0, \qquad v_z = cx$$

فإن لف متجه السرعة

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{\iota} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & cx \end{vmatrix} = -c\bar{\jmath}$$

أي أن اللف يكون في اتجاه المحور y

❖ **مؤثر لابلاس**

يعرف هذا المؤثر في الإحداثيات الكارتيزية على الصورة

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi$$

وفي حال اختلاف الإحداثيات فإن التدرج والتباعد والانحدار ومؤثر لابلاس تكون كالتالي :

1. في الإحداثيات الأسطوانية

$$\bar{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial \rho}\bar{e}_z$$

$$div\bar{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_3}{\partial\rho} = \bar{\nabla}\cdot\bar{A}$$

$$curl\ \bar{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\bar{e}_r + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right)\bar{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_2)}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}\right)\bar{e}_z$$

$$\nabla^2 F = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]F$$

2. في الإحداثيات الكروية

$$\bar{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\bar{e}_\varphi$$

$$div\bar{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, A_2)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\varphi} = \bar{\nabla}\cdot\bar{A}$$

$$curl\ \bar{A} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, A_3)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_2}{\partial\varphi}\right)\bar{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_3)}{\partial r}\right)\bar{e}_\theta$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_2)}{\partial r} - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)\bar{e}_\varphi$$

$$\nabla^2 F = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]F$$

مثال (7):أذا كان

$$\bar{r} = (t^3 + 2t)\hat{e}_x - 3e^{-2t}\hat{e}_y + 2\sin 5t\hat{e}_z$$

فأوجد

$$\frac{d\bar{r}}{dt}, \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \left|\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$$

الحل:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = (3t^2 + 2)\hat{e}_x + 6e^{-2t}\hat{e}_y + 10\cos 5t\hat{e}_z$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \sqrt{(3t^2+2)^2 + (6e^{-2t})^2 + (10\cos 5t)^2}$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 6t\ \hat{e}_x - 12e^{-2t}\hat{e}_y - 50\sin 5t\hat{e}_z$$

$$\left|\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{36t^2 + 144e^{-4t} + (50\sin 5t)^2}$$

مثال (8): أذا كان

$$\bar{A} = xz\hat{e}_x - y^2\hat{e}_y + 2x^2y\hat{e}_z$$

$$\Phi = x^2yz^3$$

فأوجد

$$\bar{\nabla}\Phi, \bar{\nabla}\cdot\bar{A}, \bar{\nabla}\times\bar{A}, \bar{\nabla}\cdot\Phi\bar{A}, \bar{\nabla}\times\Phi\bar{A}$$

$$\bar{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{e}_z = \frac{\partial x^2yz^3}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial x^2yz^3}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial x^2yz^3}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$= 2\text{xyz}^3\hat{e}_x + x^2z^3\hat{e}_y + 3x^2yz^2\hat{e}_z$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial xz}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2x^2y)}{\partial z}$$

$$= \text{z - 2y}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{\text{e}}_\text{y} & \hat{\text{e}}_\text{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \text{y}} & \frac{\partial}{\partial \text{z}} \\ xz & \text{-y}^2 & 2\text{x}^2y \end{vmatrix} = \hat{e}_x(2x^2) - \hat{e}_y(4xy - x) + \hat{e}_z(0) = 2x^2\hat{e}_x - (4xy - x)\hat{e}_y$$

$$\Phi\bar{A} = x^2yz^3 * (xz\hat{e}_x - y^2\hat{e}_y + 2x^2y\hat{e}_z)$$

$$\Phi\bar{A} = x^3yz^4\hat{e}_x - x^2y^3z^3\hat{e}_y + 2x^4y^2z^3\hat{e}_z$$

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{A}=\frac{\partial\Phi A_x}{\partial x}+\frac{\partial\Phi A_y}{\partial y}+\frac{\partial\Phi A_z}{\partial z}=\frac{\partial x^3yz^4}{\partial x}+\frac{\partial(-x^2y^3z^3)}{\partial y}+\frac{\partial(2x^4y^2z^3)}{\partial z}$$

$$=3x^2yz^4-3x^2y^2z^3+6x^4y^2z^2$$

$$\overline{\nabla}\times\Phi\overline{A}=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^2\end{vmatrix}$$

$$=\hat{e}_x(4x^4yz^3+3x^2y^3z^2)-\hat{e}_y(8x^3y^2z^3-4x^3yz^3)+\hat{e}_z(-2xy^3z^3-x^3z^3)$$

مثال (9): أثبت أن $\nabla\Phi$ هو متجه عمودي على السطح $\Phi(x,y,z)=C$ حيث C مقدار ثابت

أذا فرض أن $\bar{r}=x\hat{e}_x+y\hat{e}_y+z\hat{e}_z$ هو متجه الموضع لاى نقطة على السطح عند P

الحل:

بما أن

$$\bar{r}=x\hat{e}_x+y\hat{e}_y+z\hat{e}_z$$

$$\therefore d\bar{r}=dx\hat{e}_x+dy\hat{e}_y+dz\hat{e}_z$$

يمثل متجه مماس للسطح عند نفس النقطة p(x,y,z)

$$\therefore\overline{\nabla}\Phi\cdot d\bar{r}=(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{e}_x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{e}_y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{e}_z)\cdot(dx\hat{e}_x+dy\hat{e}_y+dz\hat{e}_z)$$

$$=(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz)=d\Phi=0$$

حيث Φ ثابت $\longleftarrow$ $\overline{\nabla}\Phi\perp d\bar{r}$

مثال (10): يتحرك جسم على مسار منحنى معادلاته البارامترية هي

$$x=3e^{-2t}\quad,\ y=4\sin3t\quad,\ z=5\cos3t$$

أوجد السرعة والعجلة عند أي زمن

الحل:

$$\bar{v} = -6e^{-2t}\hat{e}_x + 12\cos 3t\,\hat{e}_y - 15\sin 3t\hat{e}_z$$

$$\bar{a} = 12e^{-2t}\hat{e}_x - 36\sin 3t\,\hat{e}_y - 45\cos 3t\hat{e}_z$$

مثال (11): يتحرك جسيم بحيث تكون عجلته

$$\bar{a} = 2e^{-t}\hat{e}_x + 5\cos t\,\hat{e}_y - 3\sin t\hat{e}_z$$

وإذا كان الجسيم موضوعا عند(1,-3,2) عند الزمن t=0 وكان يتحرك بسرعة تعطى من

فأوجد $v_0 = 4\hat{e}_x - 3\hat{e}_y + 2\hat{e}_z$

أ- السرعة عند أي زمن

ب- الإزاحة عند أي زمن

أ-

$$\bar{v} = \int \bar{a}dt = \int (2e^{-t}\hat{e}_x + 5\cos t\,\hat{e}_y - 3\sin t\hat{e}_z)dt$$

$$\bar{v} = -2e^{-t}\hat{e}_x + 5\sin t\,\hat{e}_y + 3\cos t\hat{e}_z + C_1 \qquad (1)$$

لإيجاد الثابت C_1

$$t = 0 \Rightarrow \bar{v} = v_0 = -2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y + C_1 \Rightarrow$$

$$4\hat{e}_x - 3\hat{e}_y + 2\hat{e}_z = -2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y + C_1 \Rightarrow C_1 = 6\hat{e}_x - 3\hat{e}_y - \hat{e}_z \qquad (2)$$

$$\bar{v} = -2e^{-t}\hat{e}_x + 5\sin t\,\hat{e}_y + 3\cos t\hat{e}_z + 6\hat{e}_x - 3\hat{e}_y - \hat{e}_z$$

$$= (6 - 2e^{-t})\hat{e}_x + (5\sin t - 3)\,\hat{e}_y + (3\cos t - 1)\hat{e}_z \qquad (3)$$

ب- الإزاحة

$$\bar{r} = \int \bar{v}dt = \int ((6 - 2e^{-t})\hat{e}_x + (5\sin t - 3)\,\hat{e}_y + (3\cos t - 1)\hat{e}_z)dt$$

$$= (6t + 2e^{-t})\hat{e}_x + (-5\cos t - 3t)\,\hat{e}_y + (3\sin t - t)\hat{e}_z + C_2 \qquad (4)$$

لإيجاد الثابت C_2

$$t = 0 \Rightarrow \bar{r} = \bar{r}_0 = 2\hat{e}_x - 5\hat{e}_y + C_2 \Rightarrow$$

$$\hat{e}_x - 3\hat{e}_y + 2\hat{e}_z = 2\hat{e}_x - 5\hat{e}_y + C_2 \Rightarrow C_2 = -\hat{e}_x + 2e_y + 2\hat{e}_z \qquad (5)$$

بالتعويض من (5) في (4)

$$\bar{r} = (6t + 2e^{-t} - 1)\hat{e}_x + (-5\cos t - 3t + 2)\,\hat{e}_y + (3\sin t - t + 2)\hat{e}_z$$

7.5) تكامل المتجهات

إذا كانت $\bar{A}$ دالة متجهة في متغير u فإن تكامل هذه الدالة يعطى بالعلاقة

$$\int \bar{A}(u)du = \bar{\imath}\int A_x(u)du + \bar{\jmath}\int A_y(u)du + \bar{k}\int A_z(u)du$$

داخل عمليات التكامل كميات قياسية ولكن النتيجة كمية متجهة

أولا : التكامل الخطي

إذا كان (c) مسار منحنى يصل بين نقطتين P_1, P_2 وكان متجه الموضع لجسيم يتحرك على هذا المسار هو

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath} + z(t)\bar{k}$$

، فإذا كانت $F(x\,,y\,,z)$ دالة متجهة فإن التكامل الخطي للمركبة المماسية للدالة F المتجهة يعطى كالتالي

$$\int_{P_1}^{P_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_r \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_r A_1dx + A_2dy + A_2dy$$

فإذا كان c يمثل مسارا مغلقا لا يتقاطع مع نفسه فإن التكامل الخطي حول المسار المغلق يرمز له بالصورة التالية :

$$\int_r \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_r A_1dx + A_2dy + A_2dy$$

وبوجه عام فإن قيمة التكامل الخطي تعتمد على المسار ماعدا في الحالة الخاصة عندما يكون المجال محافظا ففي هذه الحالة يمثل المتجه $\bar{A}$ انحدار لدالة قياسية أي أن

$$\bar{A} = grade\ \varphi = \bar{\nabla}\varphi$$

ففي هذه الحالة يكون التفاف $\bar{\mathbf{A}}$ أو الشغل المبذول على المسار المغلق مساو للصفر

$$cutl\bar{A} = curl\ grade\ \varphi$$

وفي هذه الحالة تكون قيمة التكامل الخطي غير معتمدة على المسار ولكنها تعتمد على الدالة القياسية فاي عند طرفي المسار أي عند بداية المسار ونهايته ويتضح كالتالي

$$\int_{P_1}^{P_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{P_1}^{P_2} \bar{\nabla}\varphi \cdot d\bar{r} = \int_r \frac{d\varphi}{dr} dr = \int_r d\varphi$$

ففي هذه الحالة لا يعتمد التكامل على المسار بل على قيمة الدالة عند بداية المسار ونهايته فقط ويتضح كذلك أن التكامل المغلق في هذه الحالة سيكون صفرا

$$\int_r \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_{P_1}^{P_2} \bar{A} \cdot d\bar{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) = 0$$

ويسمى المتجه في هذه الحالة بالمتجه المحافظ ومثال ذلك مجال الكهربية الساكنة .

ثانيا :التكامل السطحي :

إذا كان S هو السطح الذي سيتم عليه التكامل وds عنصر المساحة و$\bar{\mathbf{n}}$ هو متجه الوحدة العمودي على المساحة ds فإن التكامل السطحي للمتجه $\bar{\mathbf{A}}$ يعطى على النحو التالي

$$\int_S \bar{A} \cdot n d\bar{s} = \int_S \bar{A} \cdot d\bar{s} = \int_S |\bar{A}||n| \cdot \cos\theta\, ds$$

ويمثل هذا التكامل التدفق (الفيض) .

ثالثا : التكامل الحجمي

إذا كان الحجم هو V و dV عنصر الحجم فإن التكامل الحجمي يعطى بالمعادلة

$$\int_V \bar{A} \cdot dV$$

8.5) نظريات التكامل

❖ نظرية جرين

وتنص على أن الفيض الكلي لمجال متجه $\bar{\mathbf{A}}$ خارج من سطح مغلق S يساوي التكامل الحجمي لتباعد هذا المتجه أو بمعنى آخر ،أن التكامل الحجمي لانتشار متجه على حجم ما يساوي التكامل السطحي للمتجه نفسه على المساحة المحيطة بالحجم نفسه

$$\int_V div\, (\bar{\nabla} \cdot \bar{A}) dV = \int_V div\, \bar{A}\, dV = \int_S \bar{A} \cdot d\bar{s}$$

❖ نظرية ستوكس

تكامل الالتفاف لمتجه على سطح ما يساوى التكامل الخطي للمتجه نفسه على المسار الخطي المحيط بتلك المساحة

$$\int_S (\bar{\nabla} \cdot \bar{A})\, d\bar{s} = \oint_C \bar{A} \cdot d\bar{\mathbf{L}}$$

أي أن التكامل الخطي المغلق لمجال متجه حول مسار مغلق يساوي التكامل السطحي لالتفاف هذا المتجه في الاتجاه العمودي على السطح المحاط بالمسار المغلق.

- **مفاهيم هامة**

- **متجه المساحة**

تمثل المساحة بمتجه يكون في اتجاه عمودي على المساحة وطوله يتناسب مع مقدارها حيث

$ds_y=dxdz$, $ds_x=dzdy$, $ds_z=dxdy$

ويمكن كتابته على الصورة التالية : $d\bar{s} = ds\bar{n}$ حيث n هي متجه الوحدة العمودي على المساحة .

- **فيض المتجه**

الفيض العمودي من متجه ما خلال عنصر مساحة ds يعرف بأنه حاصل الضرب القياسي بين المتجه وعنصر متجه المساحة . فمثلا إذا كان المتجه A يمثل شدة المجال الكهربي E فإن الفيض العمودي الكهربي للخارج خلال عنصر المساحة ds نحصل عليه كالتالي

$$dE_n = \bar{E} \cdot d\bar{s} = \bar{E} \cdot \bar{n} ds = E_n ds$$

حيث E_n مركبة شدة المجال الكهربي في الاتجاه العمودي على السطح للخارج ويعطى الفيض الكلي بالعلاقة التالية

$$\int \bar{A} \cdot d\bar{s} = \iint A_x dydz + \iint A_y dxdz + \iint A_z dydx$$

وفي حالة التكامل على أسطح مغلقة فإن اتجاه متجه الإزاحة يشير إلى خارج السطح اصطلاحا ، أي أن الفيض الكلي يمثل معدل التغير الصافي للمتجه الذي يغادر السطح المقيد للحجم المحصور .

مسائل على الباب الخامس

1- سيارة تتحرك $5km$ باتجاه الجنوب بعد ذلك $2km$ باتجاه الغرب. أوجد محصله الإزاحة (مقداراً و اتجاها).

2- سيارة تقطع مسافة $20km$ شمالاً و بعد ذلك تقطع مسافة $35km$ باتجاه $60°$ غرب الشمال . أوجد مقدار و اتجاه محصله الإزاحة .

3- إذا كان **A** يمثل إزاحة مقدارها $3m$ باتجاه يصنع $30°$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني و كانت ***B*** تمثل إزاحة مقدارها $3m$ بالاتجاه الموجب للمحور الصادي. أوجد بيانياً ما يلي

أ) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ب) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ج) $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ د) $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$

4- المتجه **A** يصنع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . أوجد مركبات **A** في الحالات التالية :

أ) $\theta = 60°$, $A = 8m$

ب) $\theta = 120°$, $A = 6m$

ج) $\theta = 225°$, $A = 12m$

5- أوجد محصلة القوى الآتية التي تؤثر في نقطه على جسم علماً بأنها مقدره بالنيوتن :

150 بزاوية *20°* ، *100* بزاوية *120°* ، *80* بزاوية *170°* ، *120* بزاوية *240°* و جميع الزوايا مقاسه بالنسبة للاتجاه الموجب لمحور السينات .

6- يتحرك جسيم على المسار

$$\bar{r} = (t^3 + t)\hat{e}_x + (3t - 2)\hat{e}_y + (2t^3 - 4t^2)\hat{e}_z$$

أوجد السرعة والعجلة مقدارا واتجاهه

7- يتحرك جسم على مسار منحنى معادلاته البارامترية هي

$$x = \cos t e^{-2t} \quad , y = \sin t e^{-t} \quad , \quad z = e^{t}$$

أوجد السرعة والعجلة عند أي زمن

8- أذا كان متجه الموضع لأي جسيم عند أي زمن

$$\bar{r} = a \cos wt \hat{e}_x + b \sin wt \, \hat{e}_y + ct^2 \hat{e}_z$$

أثبت أن مقدار السرعة لا تزيد مع الزمن ومقدار العجلة يظل ثابتا.

9- إثبت أن

$$(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$$

$$(A - B) \times (A + B) = 2A^2 \times B^2$$

يمكنك الإستعان بقوانين التوزيع الآتيه

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

10- بإستخدام المتجهات الآتية

$$P = \hat{X} \cos\theta + \hat{y} \sin\theta,$$
$$Q = \hat{X} \cos\emptyset - \hat{y} \sin\emptyset,$$
$$R = \hat{X} \cos\emptyset + \hat{y} \sin\emptyset$$

فإثبت أن

$$\sin(\theta + \emptyset) = \sin\theta \cos\emptyset + \cos\theta \sin\emptyset$$
$$\cos(\theta + \emptyset) = \cos\theta \cos\emptyset - \sin\theta \sin\emptyset$$

الباب السادس

الإحداثيات و الأشكال الهندسية

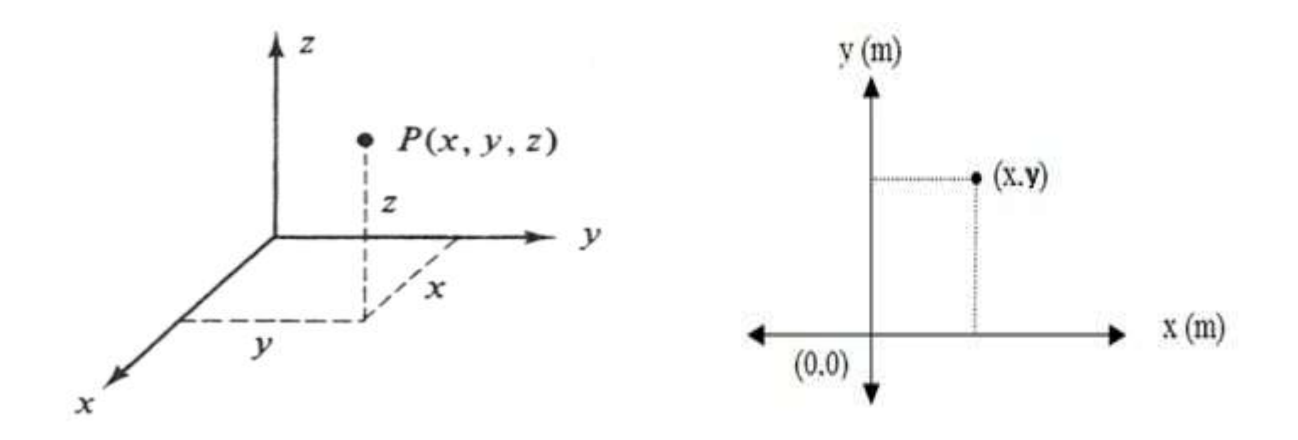
الباب السادس

الإحداثيات و الأشكال الهندسية

1.6) النظام الإحداثى

أولا: النظام الإحداثى الكارتيزى

النظام الإحداثى الكارتيزى هو النظام الخطى للإحداثيات والذى يمكن من خلاله وصف نقطة فى الفراغ بمعلومية (X,Y,Z).



شكل (6-1) : *النظام الإحداثى الكارتيزى*

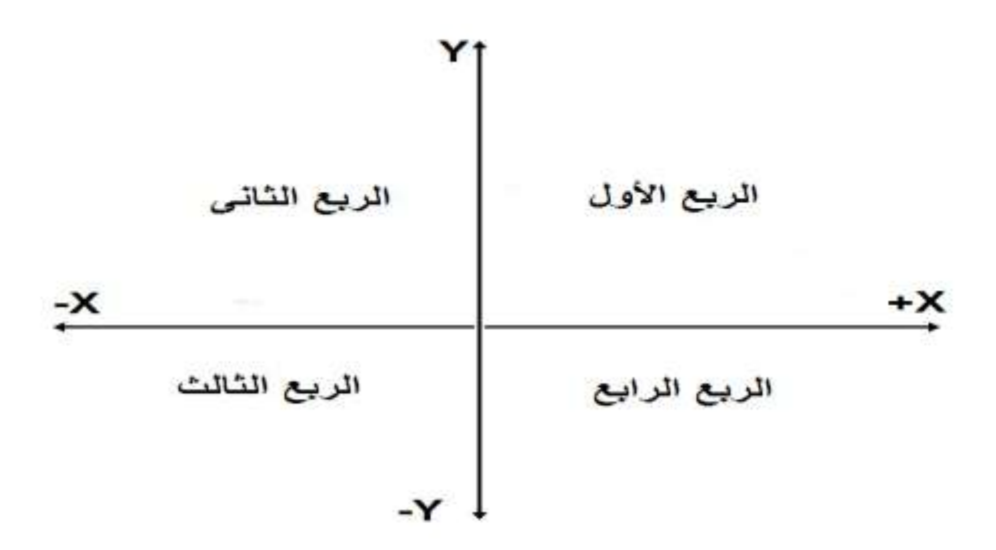
إحداثيات النقطة المتوسطة

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

ومعادلة المسافة من نقطة الأصل

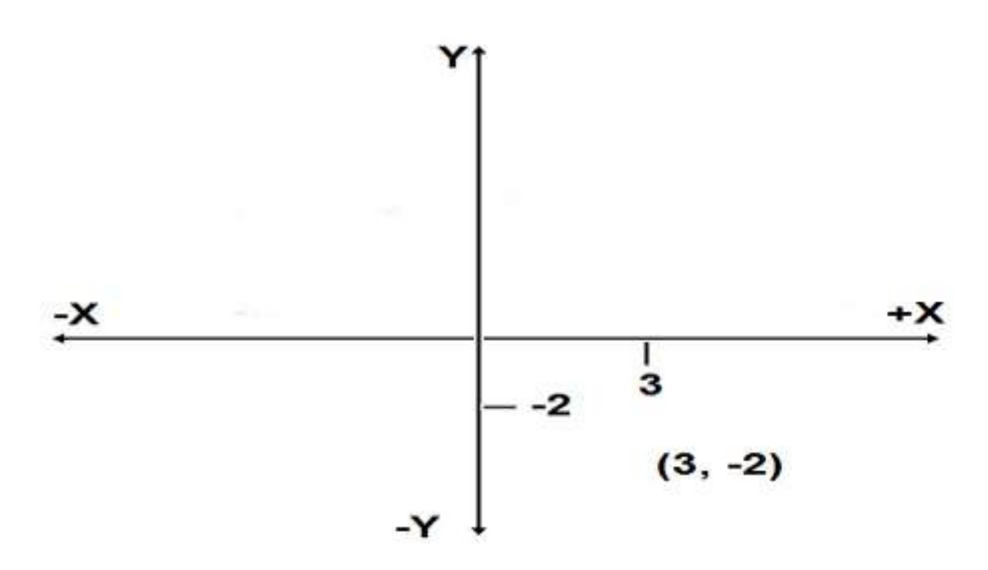
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (6.1)$$

الشكل التالى (شكل 6-2) يوضح التقسيمات المتخلفة للمحورين X وY كأجزاء سالبة وموجبة



شكل (6-2): الأجزاء المختلفة لمحاور الإحداثيات

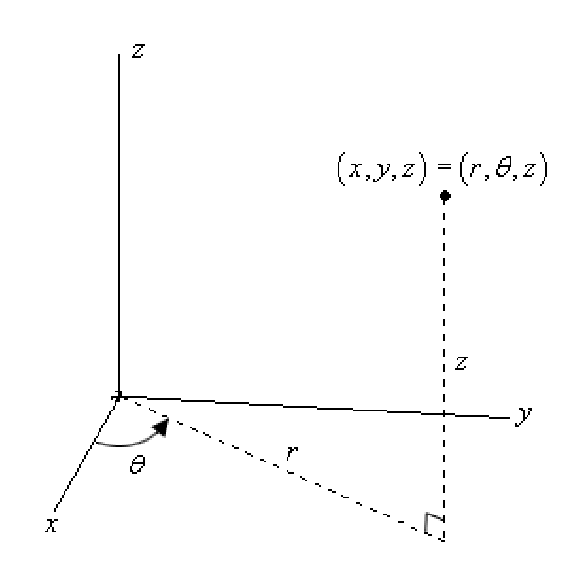
مثال: مثل النقطة (3،-2) على محاور الإحداثيات ثم إذكر الربع الذى تقع به



تقع النقطة (3،-2) تقع فى الربع الرابع من محاور الأحداثيات

ثانياً: الإحداثيات الإسطوانية :

في بعض الأحيان يكون من الأنسب استخدام نظام محاور آخر مثل نظام المحاور الإسطوانية والذي يحدد بالمسافة (نصف القطر) (r) والزاوية (θ) التي يصنعها مع المحور الأفقى وتوصف النقطة فى الفراغ فى تلك الإحداثيات بمعلومية (r, θ, z) كما هو موضح بالشكل (3.6).



شكل (6-3) : النظام الإحداثى الأسطوانى (r, θ, Z)

ولتحويل من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات الإسطوانية

$$x = r\cos\theta \;,\quad y = r\sin\theta \qquad (6.2)$$

$$0 < \theta < 2\pi$$

$$r \geq 0$$

$$-\infty < z < \infty$$

مثال (1): أجد المسافة بين النقطتين $(2, 5)$, $(-3, 7)$

الحل:

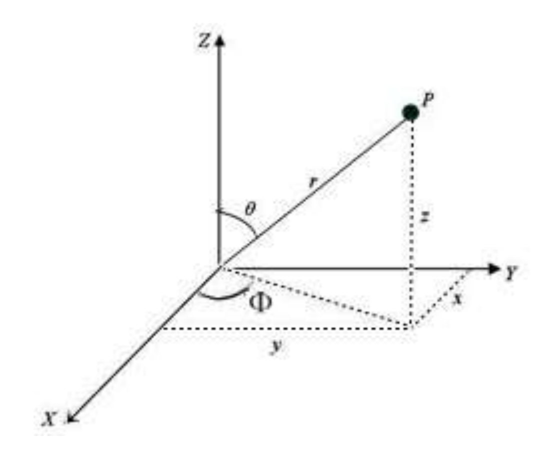
لنفرض أن

$$(x_1, y_1) = (2, 5), \quad (x_2, y_2) = (-3, 7)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3-2)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

ثالثاً:الإحداثيات القطبية :

الإحداثيات القطبية هى مجموعة المتغيرات التى تمكننا من تحديد نطقة ما فى الفراغ الثلاثى الأبعاد بمعلومية نصف القطر (ρ) وزاوية السقوط على الدائرة الإستوائية (θ) وزوية السقوط على الدائرة القطبية (∅) أى أن النظام الإحداثى الكروى أو القطبى يمثل بواسطة $(\rho, \theta, \emptyset)$



شكل (6-4): النظام الإحداثى القطبى (ρ, θ, ∅)

وللتحويل من النظام الإحداثى الكارتيزى إلى النظام الأحداثى القطبى

$$x = \rho \sin\emptyset \cos\theta\,, \quad y = \rho \sin\emptyset \sin\theta\,, \quad z = \rho\cos\emptyset \qquad (6.3)$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$\rho \geq 0$$

$$0 < \rho < 2\pi$$

وتعطى قيمة نصف القطر (ρ) بالمعادلة

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (6.4)$$

مثال (2): أوجد الإحداثيات الكارتيزية للنقطة $B(8, 120^0, 30^0)$ و $A(8, 120^0, 5)$

الحل

أ) النقطة A

الإحداثيات الاسطوانية للنقطة A

$$\rho = 8, \quad \varphi = 120, \quad z = 5$$

$$x = \rho \cos \emptyset, \qquad y = \rho \sin \emptyset, \qquad Z = Z$$

إذن

$$x = 8\cos 120 = -4, \quad y = 8\sin 120 = 4\sqrt{3}, \quad z = 5$$

وعلى هذا فالإحداثيات الكرتيزية للنقطة A هى

$$A(-4, 4\sqrt{3}, 5)$$

ب) النقطة B

الإحداثيات الكروية للنقطة B هى

$$r = 8, \qquad \theta = 120, \qquad \varphi = 30$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \;, y = r\sin\theta\sin\varphi \quad, z = r\cos\theta$$
$$x = 8\sin 120\cos 30 \;, y = 8\sin 120\sin 30 \quad, z = r\cos 120$$
$$x = 6 \qquad\qquad , y = 2\sqrt{3} \qquad\qquad , z = -4$$

وعلى هذا فالإحداثيات الكرتيزية للنقطة B هى

$$A(6,2\sqrt{3},-4)$$

مثال (3): أوجد موقع النقطة $A(2,-1,3)$ فى الإحداثيات الإسطوانية والكروية

الحل:

أ) الإحداثيات الإسطوانية

الإحداثيات الكارتيزية للنقطة المعطاة

$$x = 2, y = -1, z = 3$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-1}{2} = 333.3^0$$
$$z = 3$$

إذن الإحداثيات الاسطوانية للنقطة

$$(\sqrt{5},333.3^0,3)$$

ب) الإحداثيات الكروية

الإحداثيات الكارتيزية للنقطة A

$$x = 2, y = -1, z = 3$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\theta = cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{14}} = 36.8$$

$$\varphi = tan^{-1} \frac{y}{x} = tan^{-1} \frac{-1}{2} = 333.3^0$$

الإحداثيات الكروية للنقطة A

$$(\sqrt{14}, 36.8^0, 333.3^0)$$

مثال (4): عبر عن المتجه $\overline{F} = y\hat{e}_x - x\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ بدلالة الإحداثيات الإسطوانية والكروية

الحل

الإحداثيات الإسطوانية

$$x = \rho \cos \emptyset, \qquad y = \rho \sin \emptyset, \qquad Z = Z$$

$$\hat{e}_x = \cos\varphi \hat{e}_\rho - \sin\varphi \hat{e}_\varphi$$
$$\hat{e}_y = \sin\varphi \hat{e}_\rho + \cos\varphi \hat{e}_\varphi$$
$$\hat{e}_z = \hat{e}_z$$

$$\overline{F} = \rho \sin\varphi(\cos\varphi \hat{e}_\rho - \sin\varphi \hat{e}_\varphi) - \rho \cos\varphi(\sin\varphi \hat{e}_\rho + \cos\varphi \hat{e}_\varphi) + z\hat{e}_z$$
$$\overline{F} = \rho \sin\varphi \cos\varphi \hat{e}_\rho - \rho \sin^2\varphi \hat{e}_\varphi - \rho \cos\varphi \sin\varphi \hat{e}_\rho - \rho \cos\varphi^2 e_\varphi + z\hat{e}_z$$
$$\overline{F} = -\rho(\sin^2\varphi + \rho os\varphi^2)e_\varphi + z\hat{e}_z = -\rho e_\varphi + z\hat{e}_z$$

الإحداثيات الكروية

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \ , y = r\sin\theta \sin\varphi \ , z = r\cos\theta$$

$$\hat{e}_x = \sin\theta\cos\varphi\hat{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\hat{e}_\theta - \sin\varphi\hat{e}_\varphi$$

$$\hat{e}_y = \sin\theta\sin\varphi\hat{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\hat{e}_\theta + \cos\varphi\hat{e}_\varphi$$

$$\hat{e}_z = \cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta$$

$$\bar{F} = r\sin\theta\cos\varphi(\sin\theta\cos\varphi\hat{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\hat{e}_\theta - \sin\varphi\hat{e}_\varphi)$$

$$+ \mathrm{r}\sin\theta\sin\varphi(\sin\theta\sin\varphi\hat{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\hat{e}_\theta + \cos\varphi\hat{e}_\varphi)$$

$$+ \mathrm{r}\cos\theta(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta)$$

$$\bar{F} = r\sin^2\theta\cos^2\varphi\sin\theta\hat{e}_r + r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\hat{e}_\theta - r\sin^2\varphi\cos\varphi\hat{e}_\varphi)$$

$$+ (\mathrm{r}\sin^2\theta\sin^2\varphi\hat{e}_r + \mathrm{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\hat{e}_\theta + \mathrm{r}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\hat{e}_\varphi)$$

$$+ \mathrm{r}\cos^2\theta\hat{e}_r - \mathrm{r}\cos\theta\sin\theta\hat{e}_\theta$$

$$\bar{F} = r\cos^2\theta\hat{e}_r - r\sin\theta\cos\theta\hat{e}_\theta - r\sin\theta\hat{e}_\varphi$$

مثال (5): عبر عن المجال الحراري $\mathrm{T} = 240 + \mathrm{z}^2 - 2\mathrm{xy}$ بدلالة الإحداثيات الاسطوانية والكروية

الحل

الإحداثيات الاسطوانية

$$x = \rho\cos\emptyset, \qquad y = \rho\sin\emptyset, \qquad Z = Z$$

$$T = 240 + z^2 - 2\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi$$

$$T = 240 + z^2 - \rho^2\sin 2\varphi$$

الإحداثيات الكروية

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = \mathrm{r}\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = \mathrm{r}\cos\theta$$

$$T = 240 + \mathrm{r}^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{r}\sin\theta\sin\varphi$$

$$T = 240 + \mathrm{r}^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$$

2.6) الخط المستقيم

تكتب الصور العامة لمعادلة للخط المسقيم على الشكل

$$y = mx + b \qquad (6.5)$$

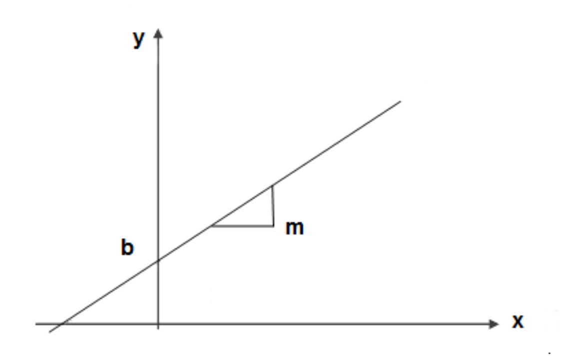
حيث m هى ميل الخط المستقيم و b هو الجزء المقطوع من محور الصادات (y) . وميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين يعرف على انه النسبة بين التغير فيy والتغير في x

إذن :

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad (6.6)$$

حيث

$$x_1 \neq x_2$$



شكل (6-5) : يوضح ميل الخط المستقيم والجزء المقطوع من محور الصادات

- إذا كان ميل الخط مساويا للصفر فان ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

- إذا كان الميل يساوي $\infty-$ فان ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

خ- المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة:

- يقال أن المستقيم L_1 موازياً للمستقيم L_2 إذا كان ميل أحدهما يساوى الآخر

أي أن $L_1 \parallel L_2$ إذا كان فقط $m_1 = m_2$

- يقال أن المستقيم L_1 يعامد المستقيم L_2 إذا كان حاصل ضرب ميلاهما يساوى الوحده

أي أن $L_1 \perp L_2$ إذا كان فقط $m_1 \times m_2 = 1$

د- أشكال مختلفة لمعادلة الخط المستقيم

- معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة $P(x_1, y_1)$ هى

$$y - y_1 = m(x - x_2) \qquad (6.7)$$

وهى تمثل معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله و أحد النقاط الواقعه عليه

- معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $\mathrm{P_1} = (\mathrm{x_1}, \mathrm{y_1})$ و $\mathrm{P_2} = (\mathrm{x_2}, \mathrm{y_2})$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (6.8)$$

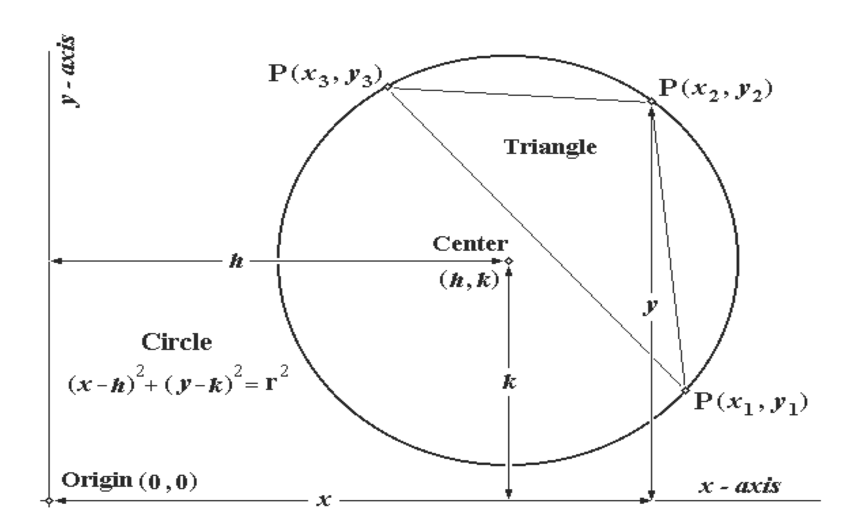
وهى تمثل بمعادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطتين عليه

- و أخيراً يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم بمعلومة الجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات على الصوره

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (6.9)$$

3.6) الدائرة

الدائرة هى مجموعة النقاط المتصلة ببعضها والواقعة فى المستوى وتبعد مسافة ثابتة من نقطة ثابتة ما تقع فى منتصف الدائرة وتسمى بمركز الدائرة



شكل (6-6) : يمثل الدائرة التى نصف قطرها (r) ومركزها (h, k)

معادلة الدائرة التي مركزها (h ، k) ونصف قطرها (r) تكتب على الصورة

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

وبفك المعادلة السابقة

$$x^2+h^2-2hx+y^2+k^2-2ky=r^2$$

وبإعادة ترتيب الحدودللمعادلة السابقة نحصل على

$$x^2+y^2-2hx-2ky-h^2-k^2-r^2=0$$

وبوضع

$$h = -a, \quad k = -b, \quad h^2 - k^2 - r^2 = c$$

نحصل على

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (6.10)$$

وتمثل المعادلة (10.6) الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (h, k) ونصف قطرها (r)

وفى حالة إذا ما كان مركز الدئرة هو نقطة الأصل (0 ,0) ونصف قطرها (r) فإن معادلة الدائرة تأخذ الشكل

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (6.11)$$

4.6) القطاعات الهندسية

1- القطع الناقص (الإهليج)

هو مجموعة النقاط فى المستوى التى يكون مجموع بعدها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) عدد ثابت

وتعطى معادلة القطع الناقص الذى مركزه (h, k) وبؤرتاه تقع على محور السينات على الصوره

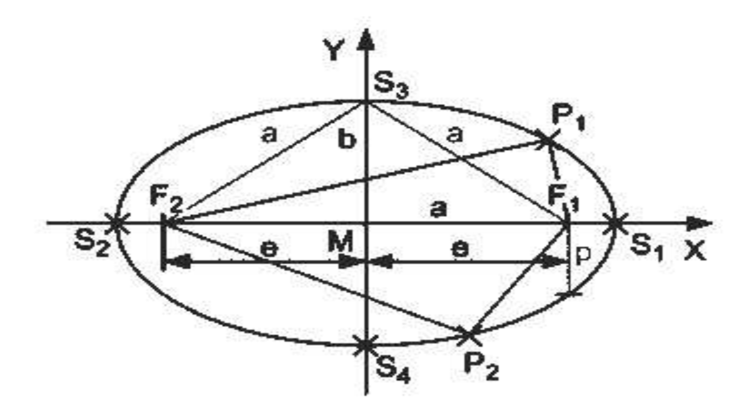
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (6.12)$$

حيث $a > b$

وتمثل F_1 و F_2 بؤرتى القطع الناقص والعدد الثابت هو $2a$ حيث أن $c > 0, a > 0$

وترتبط المسافات a, b, c معاً بالمعادلة

$$c^2 = a^2 - b^2$$



شكل (6-7) : القطع الناقص

وتسمى النقطة التى تقع فى منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين بمركز القطع ويسمى المستقيم المار بالبؤرتين بالمحور البؤرى ويقطع القطع الناقص فى نقطتين تسميان رأسا القطع وتسمى القطع المستقية الواصلة بين الرأسيين بالمحور الكبير وطولها (2a) وتسمى النسبة ($\frac{c}{a}$) بالإختلاف الكبير.

وبالمثل أيضاً فإن معادلة القطع الناقص الذى تقع بؤرتاه على محور الصادات تكون على الصوره

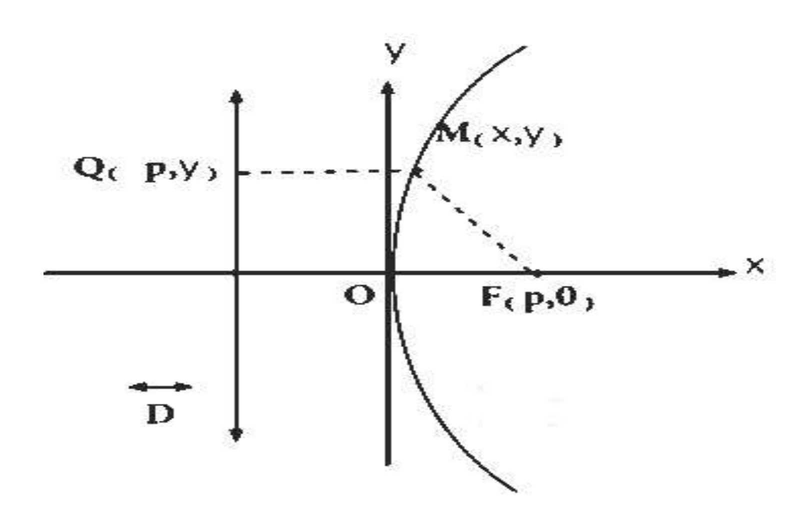
$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(y-h)^2}{b^2}=1 \qquad (6.13)$$

2- القطع المكافئ

القطع المكافئ (شكل 7.4) هو مجموعة النقط (M(x , y) في المستوي والتي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة F(p,0) تسمى البؤرة حيث P> 0 مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم "D" يسمى الدليل لا يحوي البؤرة. اي أن

$$\mathrm{MF} = \mathrm{MQ}$$

وتسمى النقطة "O" برأس القطع المكافئ، ويسمى المستقيم (x) المار بالبؤرة والعمود على الدليل بمحور القطع المكافئ



شكل (8-6) : القطع المكافئ

3- معادلة القطع المكافئ

أولاً : القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات (x-axis) ورأسه في نقطة الأصل

في المستوي الديكارتي المتعامد المحورين وبناءاً على تعريف القطع المكافئ يمكن ايجاد معادلة القطع المكافئ في ابسط صورة ممكنة كما يلي :

لتكن النقطة $F(p,0)$ هي بؤرة القطع المكافئ والمستقيم D هو دليل القطع المكافئ ، والنقطة $Q(-p,y)$ نقطة على الدليل حيث MQ عمودي على المستقيم D ، والنقطة $M(x,y)$ من نقط منحني القطع المكافئ والرأس في نقطة الاصل (0,0) كما في الشكل (8.6) **.**

من تعريف القطع المكافئ حيث

$$MF = MQ$$

إذن

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2}$$

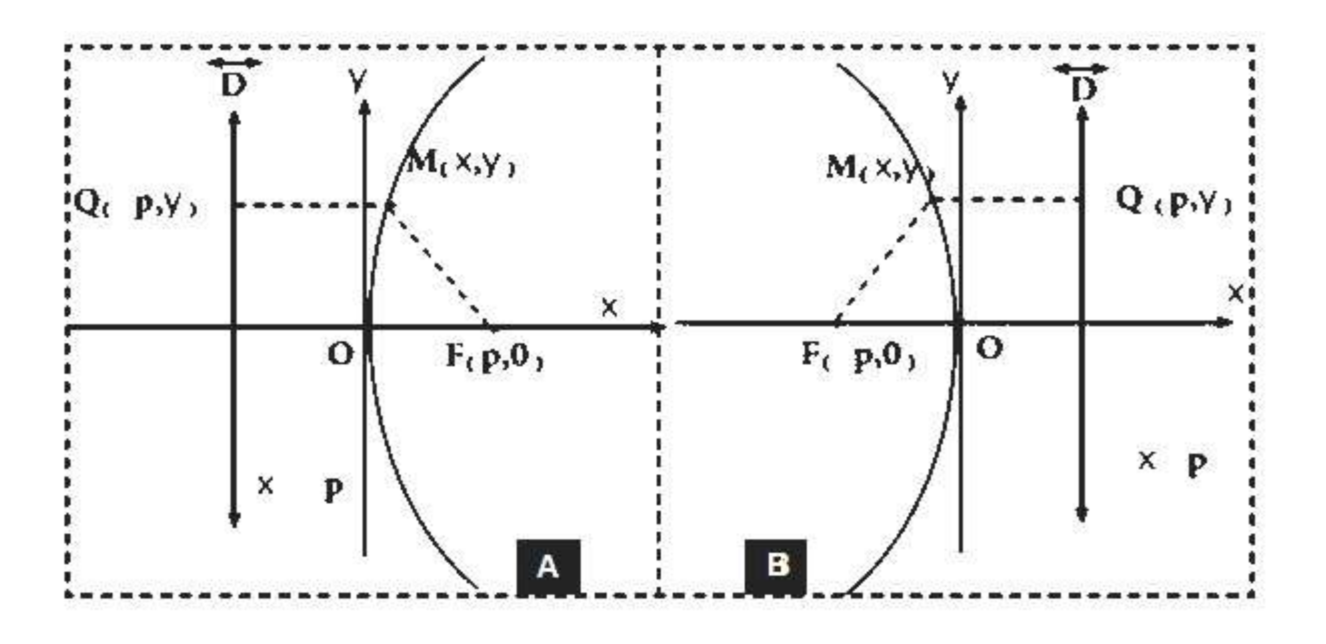
وبتربيع الطرفين وفك الأقوس

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

وتكون المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات (x-axis) ورأسه في نقطة الأصل

$$y^2 = 4\,px\,, \forall\, p > 0 \qquad (6.14)$$

ومعادلة الدليل $x = -p$

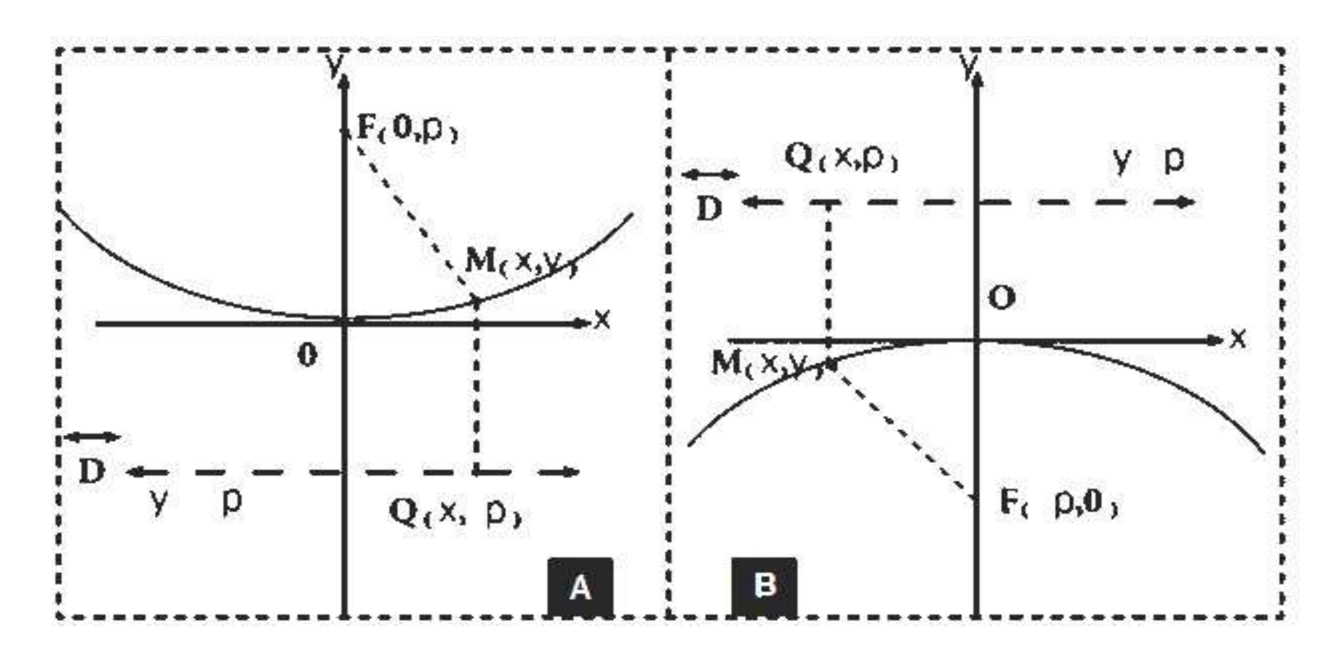


شكل (6-9) : القطع المكافئ الذى بؤرته تنتمى لمحور السينات ورأسه النقطه (0, 0)

ثانياً : معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات (y-axis) ورأسه في نقطة الأصل

وبالمثل يمكننا الحصول على معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات (y-axis)

ورأسه نقطة الأصل.



شكل (6-10) : القطع المكافئ الذى بؤرته تنتمى لمحور الصادات ورأسه النقطه (0, 0)

وتكون المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذى ينتمى لمحور الصادات

$$x^2 = 4\,py\,, \forall p > 0 \qquad (6.15)$$

ثالثاً: المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد محورى الأحداثيات ورأسه النقطة (h, k)

فيما سبق تعرفنا على معادلتين قياسيتين للقطع المكافئ وهما:

$$y^2 = 4px \ldots\ldots\, (i)$$

$$x^2 = 4py \ldots\ldots\, (ii)$$

المعادلة الاولى :هي معادلة قطع مكافئ بؤرته تنتمي لمحور السينات ورأسه نقطة الاصل (0,0)

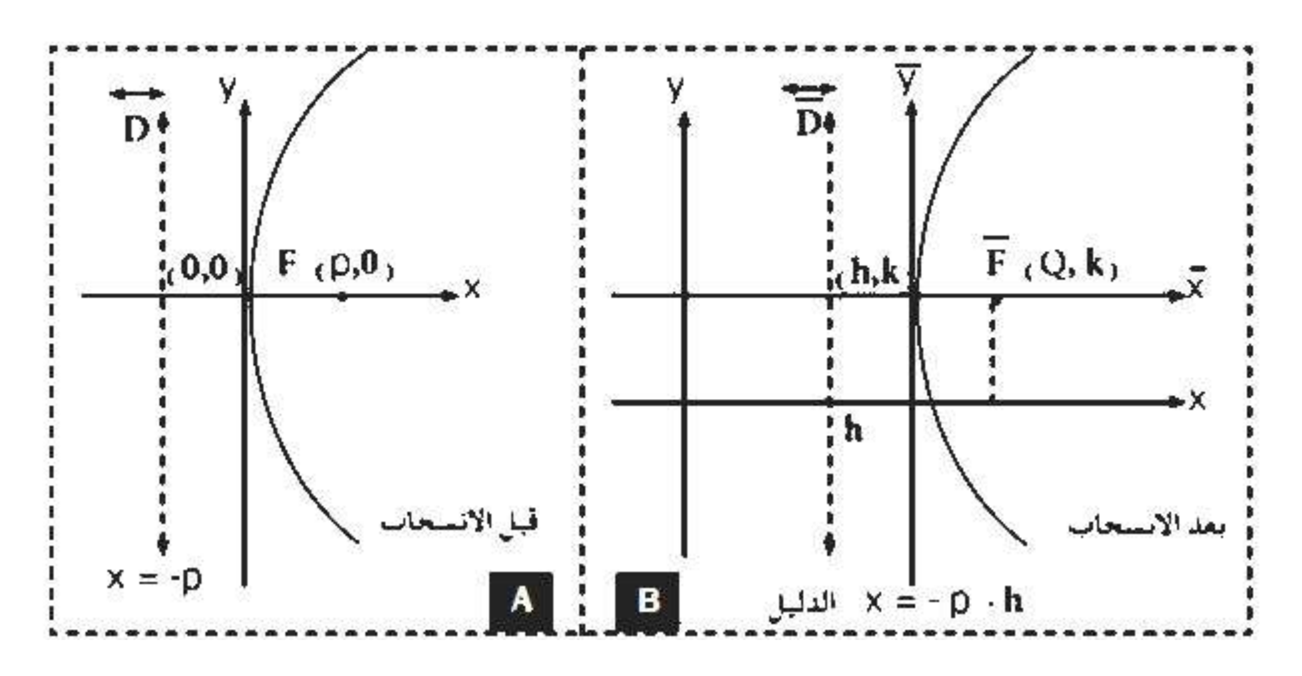
المعادلة الثانية :معادلة قطع مكافئ بؤرته تنتمي لمحور الصادات ورأسه نقطة الاصل(0,0)

فاذا كان الرأس هو النقطة $(O\ (h\ ,k))$ فان المعادلتين القياسيتين هما

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \ldots\ldots (iii)$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \ldots\ldots (iv)$$

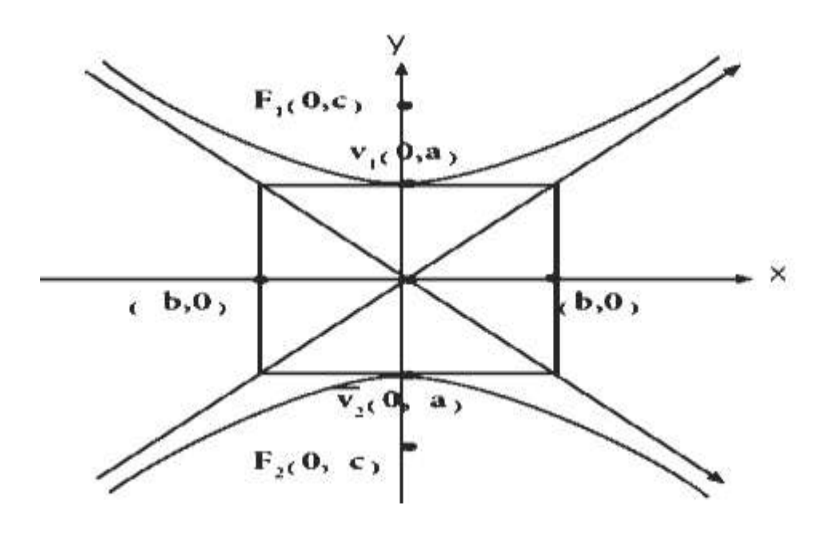
تمثل المعادلتين السابقتين المعادلات القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه النقطة $(h\ ,k)$ ومحوره يوازي إما محور السينات أو محور الصادات على الترتيب.



شكل (6-11) : القطع المكافئ الذى بؤرته تنتمى لمحور الصادات ورأسه النقطه (h, k)

4- القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتاً. شكل (11.6)



شكل (12.6) : القطع الزائد

البؤرتان هما

$$F_1(c,0), F_2(c,0))$$

والرأسان هما

$$V_1(a,0), V_2(-a,0)$$

والنقطة $P(x,y)$ نقطة من نقاط منحني القطع الزائد. ومن التعريف السابق للقطع الزائد فإن

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

حيث (2a) عدداً ثابتاً يمثل طول المحور الحقيقي للقطع الزائد الذي تقع عليه البؤرتين والرأسين وكل من (PF_1, PF_2) يسميان طولي نصفي القطرين البؤريين المرسومين من نقطة (P) والمسافة $(F_1 F_2)$ تسمى بالبعد البؤري ويساوي 2c وطول المحور المرافق او التخيلي هو (2b) (وهو المحور العمودي على المحور الحقيقي والمار بمركز القطع)

معادلة القطع الزائد

أولاً : معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل

من الشكل (11.6) وطبقاً لتعريف القطع الزائد فإن

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

$$\Rightarrow (x - c)^2 + y^2 - (x + c)^2 + y^2 = \pm 2a$$

$$\Rightarrow (x - c)^2 + y^2 = \pm 2a + (x + c)^2 + y^2$$

وبتربيع الطرفين والتبسيط نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ومن الشكل (11.6) حيث أن

$$c > 0 , a > 0 , c > a$$

$$c_2 - a_2 > 0$$

وبفرض ان $b_2 = c_2 - a$

وبتعويض عن $a^2 - c^2 = b^2$ في المعادلة القياسية السابقة نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6.16)$$

ثانياً : معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل

اذا كانت البؤرتان على محور الصادات ومحورالسينات هو العمودى على $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ من نقطة الاصل. وبنفس الطريقة السابقة نجد المعادلة القياسية للقطع الزائد فى تلك الحالة.

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (6.17)$$

الباب السابع

الـدوال

الباب السابع

الـدوال

1.7) دالة القوى

1- الأُس عدد طبيعي والأساس عدد حقيقي ثابت:

هي صورة كتابة مُختصرة لحاصل ضرب عوامل مُتشابهة عدد نهائي من المرات، والقوى هي عملية أُحادية ومُغلقة تُجرى على الأعداد الحقيقية.

فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا عدد من العوامل المتشابهه a مضروبه ببعضها عدد n من المرات فإنه يمكن كتابتها على الصورة

$$a \times a \times a \times a \times a \times a \times \ldots = a^n$$

حيث

$$a \in R$$

$$n \in N$$

2- **الأُس عدد صحيح سالب والأساس عدد حقيقي ثابت**

في حالة ما إذا كان الأُس عدد صحيح سالب والأساس عدد حقيقي ثابت فإن دالة القوة تعرف بالصورة

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$n \in N, \quad a \neq 0$$

3- الأُس عدد نسبي والأساس عدد حقيقي ثابت

فى حالة ما إذا كان الأس عدد نسبى و الأساس عدد حقيقى فإن دالة القوة تكتب على الصوره

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$n \in N, \quad a > 0$$

ويمكننا تعميم ذلك التعريف لكل أس نسبى على الصورة $\frac{m}{n} \in Q$ بحث أن $n, m \in N$ و أيضاً $n \neq$ $n, a > a$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

خصائص دالة القوى

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^0 = 1$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

ملحوظة :

إذا كان أُس القوة زوجي والأساس سالب فالنتيجة النهائية موجبة، أي:

$a^b = c$ بحيث أن $a < 0$ و b عدد زوجي.

2.7) الدالة الأسية

تعرف الدالة الأسية على أنها الدالة المعرفة على مجموعة الأعدد الحقيقية R بحيث يوجد لكل عدد حقيقى x عدد صحيح موجب y يحقق العلاقة التالية

$$y = \ln(x) \qquad (7.1)$$

ويرمز للدالة الأسية بالرمز *(exp)* أو *(e)*

خواص الدوال الأسية

لكل عدد x ينتمى لمجموعة الأعداد الحقيقية فإن

-1 $e^x > 0$

-2 $e^0 = 1$

-3 $\ln(e^x) = x$

-4 $e^{lnx} = x$

-5 $e^{a+b} = e^a e^b$

-6 $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

-7 إذا كان $e^a = e^b$ فإن $a = b$

و إذا كان $e^a < e^b$ فإن $a < b$

حيث أن a و b عددان حقيقيان

تفاضل الدالة الأسية (e^x)

بفرض أن لدينا دالة f(x) قابلة للإشتقاق فإن

$$\frac{dy}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x)$$

تكامل الدالة الأسية

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

3.7) الدالة اللوغارتمية

يعرف لوغاريتم عدد ما بالنسبة لأساس ما، بأنه الأس المرفوع على الأساس والذي سينتج ذلك العدد

ولذا فإذا كان

$$y = \log_a x \qquad (7.2)$$

بحيث أن $x = a^y$

أى أن الدالة اللوغارتمية هى معكوس الدالة الأسية

العمليات على اللوغارتمات

$$\log_a(pq) = \log_a p + \log_a q$$

$$\log_a \left(\frac{P}{q}\right) = \log_a p - \log_a q$$

$$\log_a p^n = n \log_a p$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

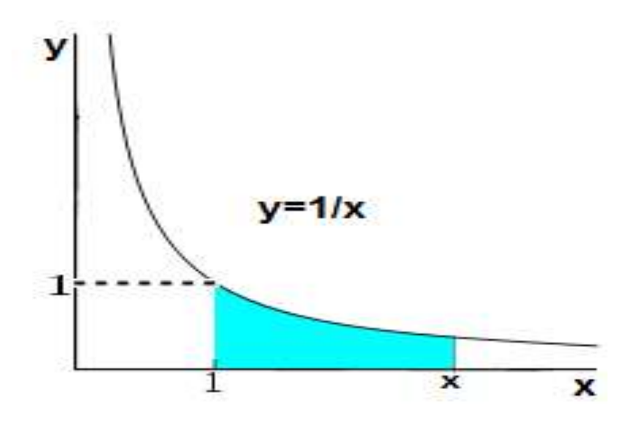
اللوغارتم الطبيعى

تكتب الصوره العامة لمعادلة التكامل الغير محدود للدالة الأسية على الشكل

$$\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad (7.3)$$

وذلك تحت شرط أن $n \neq -1$ وكما هو واضح من الشكل المقابل فإن $y = {}^{1}/_{x}$ لابد أن يكون ممكنن حتى

نستطع تكامل تلك الدالة



لنفرض أن أحد حدود التكامل هى $x = 1$

وهذا يعنى أن التكامل سيكون محدود بين النقطتين $x = 1$ و x .

$$[F(x)]_1^x = \int_1^x f(x)dx \qquad (7.4)$$

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{x} \qquad (7.5)$$

سنقوم الأن بدراسة بعض الخصائص الهامة للدالة F'

لنفرض أن

أ) $g(x) = kx$ ب) $g(x) = x^n$

$$F'(x^n) = F'\big(g(x)\big) = \frac{1}{x^n}nx^{n-1} = \frac{n}{x} \qquad F'(kx) = F'\big(g(x)\big) = \frac{1}{kx}k = \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = \frac{1}{x} \qquad F'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F'(x^n) - nF'(x) = 0 \qquad F'(kx) - F'(x) = 0$$

$$F'(x^n - nx) = 0 \qquad F'(kx - x) = 0$$

$$F(x^n) - nF(x) = C \qquad F(kx) - F(x) = C$$

بفرض أن $x = 1$ بفرض أن $x = 1$

$$F(1) = 0 \qquad F(k) - F(1) = C$$

$$C = 0 \qquad F(1) = 0$$

$$C = F(k)$$

$$F(kx) = F(k) + F(x) \qquad\qquad F(x^n) = nF(x)$$

وتلك الحالتان تعطى إنطبعاً على أن $F(x)$ هى لوغارتم حيث تخضع الدالة لقوانين اللوغارتمات ومن ثم فيمكننا وضع تعريف عام للدالة اللوغارتمية على الصورة حيث

$$F(x) = \ln x \qquad (7.6)$$

فإن

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dx \qquad (7.7)$$

وهى عن اللوغارتم الطبيعى حيث $x > 0$

الأس الطبيعى

من المعروف أن اللوغرتم الطبيعى يعرف على الصورة

$$F(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dx$$

حيث

$$x > 0, \qquad \ln 1 = 0$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{1}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - lnx}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \ln(\frac{x + \Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}}$$

لنفرض أن $x = 1$

$$1 = \lim_{\Delta x \to 0} \ln(1 + \Delta x)^{1/\Delta x}$$

$$e^1 = \lim_{\Delta x \to x} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x} = e \qquad (7.8)$$

تفاضل وتكامل الدالة اللوغارتمية

اللوغارتم الطبيعى

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dx \qquad x > 0$$

$$\ln f(x) = \int_1^x \frac{1}{f(x)} f'(x) dx$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = 1/x$$

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

4.7) القانون الأسى للنمو والإضمحلال

فى العديد من الظواهر الفيزيائية نجد أن معدل التغير فى معامل ما يتناسب مع قيمة هذا المعامل عند أى لحظة زمنية. على سبيل المثال معدل التبريد لجسيم من درجة الحرارة العالية، ومعدل التحلل الذى يحدث للأنوية المشعة مع مرور الزمن وأيضاً معدل نمو البكتيريا.

من الناحية الرياضية نعبر عن معدل التغير الذى يحدث فى ظاهرة ما على الصورة

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

حيث λ هو ثابت التناسب ويكون موجب فى حالة النمو وسالب فى حالة الإضمحلال.

المعادلة السابق يمكن إعادة كتابتها وذلك عن طريق إعادة ترتيب الحدود على الصوره

$$\frac{1}{N} dN = \lambda dt$$

بإجراء التكامل لطرفى النعادلة السابقة

$$\int_{N_o}^{N_t} \frac{1}{N} dN = \lambda \int_0^t dt$$

$$\ln N_t = \lambda t + \ln N_0$$

$$N_t = N_o e^{\lambda t} \qquad (7.9)$$

فى المعادلة السابقة N_o تمثل قيمة المتغير عند زمن $t = 0$ و N_t هى قيمة المتغير عند زمن t. وحيث أن $\frac{dN}{dt}$ يتناسب مع N_t فبرسم العلاقة بين $\ln(\frac{dN}{dt})$ وبين معامل متغير ما فيكون ميل المستقيم الناتج هو λ.

معدل التغير فى النمو أو الأضمحلال فى زمن معين لمعامل متغير ما يزيد أو يقل على الترتيب بمعدل 2. ويسمى معدل الزيادة أو النقصان بفترة نصف العمر $t_{1/2}$

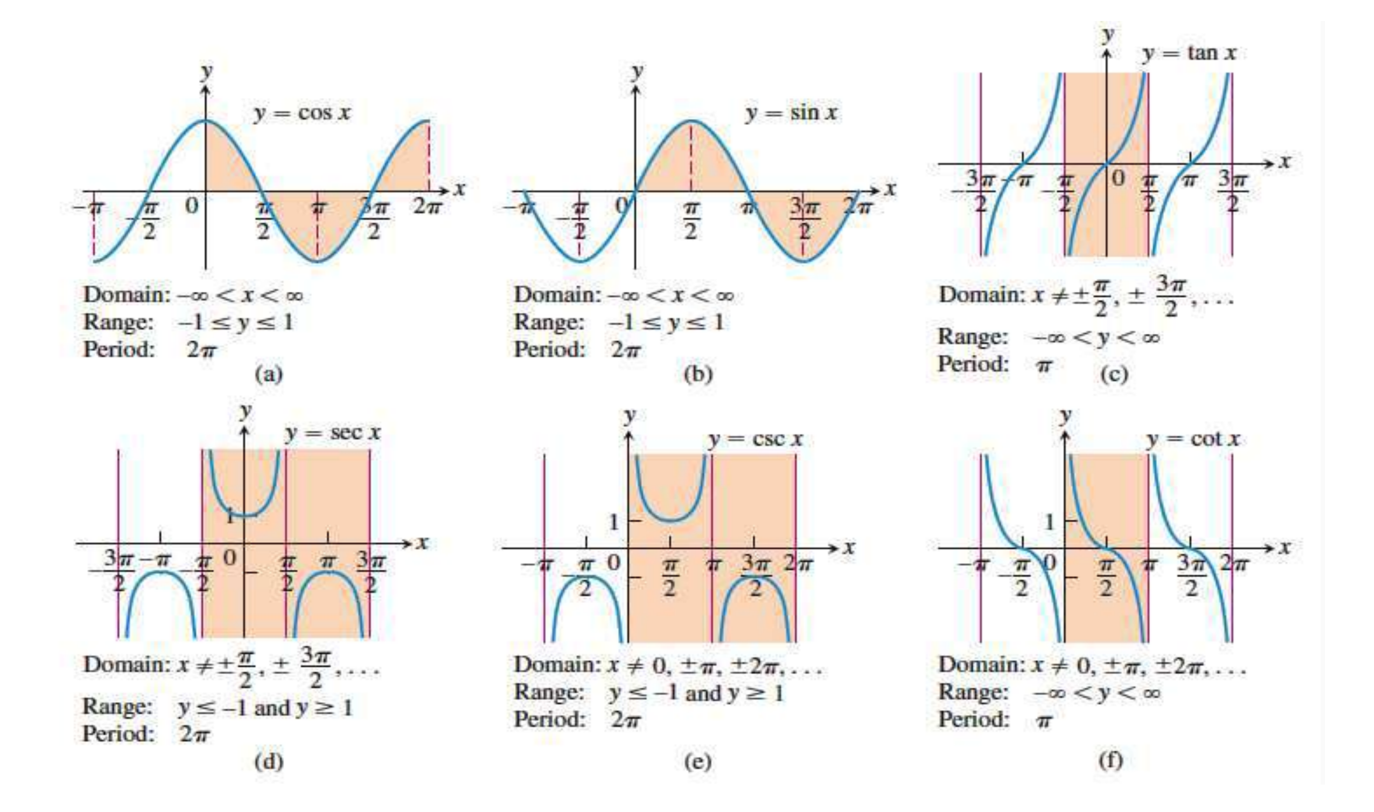
$$\frac{N_t}{N_0} = e^{\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$\ln\frac{1}{2} = \lambda t_{1/2}$$

$$t_{1/2} = -\frac{0.69}{\lambda} \qquad (7.10)$$

5.7) الدوال المثلثية

تسمى الدوال المثلثية بالدوال الدائرية وهى تنقسم إلى ست دوال : دالة الجيب sine وتختصر على الصوره (sin) وجيب التمام cosine وتختصر (cos) ودالة الظل tangent وتختصر (tan) ودالة قاطع التمام cosecant وتختصر (csc) ودالة القاطع secant وتختصر (sec) ودالة ظل التمام contangent وتختصر (cot).



شكل (7-1) : *الدوال المثلثية الأصلية*

تفاضل وتكامل الدوال المثلثية

تفاضل وتكامل الدوال المثلثية ومقلوباتها يكون كالآتى

$$\frac{d}{dx}sinx = cosx$$

$$\frac{d}{dx}cosx = -sinx$$

$$\frac{d}{dx}tanx = sec^2x$$

$$\frac{d}{dx}cscx = -cscx\,cotx$$

$$\frac{d}{dx} secx = secx\ tanx$$

$$\frac{d}{dx} cotx = -csc^2 x$$

ومن ناحية أخرى فإن تكامل الدوال المثلثية ومقلوباتها كالآتى

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int sec^{\ 2}\ x dx = \tan x + c$$

$$\int csc^2 x = \cot x + c$$

$$\int \mathrm{sex}\, x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$\int \tan x dx = \ln(\sec x) + c$$

$$\int \cot x dx = \ln(\sin x) + c$$

$$\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + c$$

$$\int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x) + c$$

معكوس الدوال المثلثية

إذا إعتبرنا الدلة

$$y = sin^{-1}x$$

فإن معكوس الدالة يكتب على الصورة

$$y = sin^{-1}x$$

ويجب مراعات أن (-1) لا تعنى مقلوب الدلة المثلثية ولكنها تعنى المعكوس لتلك الدالة حيث y الزاوية التـى يكون جيبها (sin) هو x. ويكون معكوس الدالة فى هذه الحالة دالة إذا كانت قيمة x محصـورة بين$-1 \leq$ $x \leq 1$

ولتجنب الخلط بين معكوس دالة sin ومقلوبها فإن المعكوس يشار إليه على الصورة (acrsine)

$$y = acrsine\ x$$

وهذا يعنى أن y هى الزاوية التى جيبها (sin) هو x

وبالمثل فإن معكوس دالة cos هو arcos ودالة tan هو arctan ويكتب على الصورة

$$y = cos^{-1}x$$

$$y = tan^{-1}x$$

ومن ناحية أخرى فإن معكوس الدوال cosecant, sectan, cotangent يكتب على الصورة

$$y = csc^{-1}x$$

$$y = sec^{-1}x$$

$$y = cot^{-1}x$$

ويكون التفاضل للدوال المثلثية العكسية هو

$$\frac{d}{dx}sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}csc^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}cot^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2}$$

ويمكننا الحصول على تكامل الدوال المثلثية العكسية بتكامل طرفى المعادلات السابقة فعلى سبيل المثال يمكنن تكامل دالة معكوس الجيب (sin^{-1}) كالأتى

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = sin^{-1} + c$$

وبالمثل بالنسبة لمعكوس لدالة جيب التمام (cos) ودالة الظل (tan) ومقلوبات تلك الدوال.

إشتقاق الدوال المثلثية

إذا إعتبرنا صورة الدالة

$$y = sinx$$

فيمكننا دراسة إشتقاق y بالنسبة إلى x. فعن طريق النهايات نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x}\cos(\mathrm{x} + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(\mathrm{x} + \frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x}\sin\frac{\Delta x}{2} = \cos x$$

وبالمثل يمكننا أيضاً إشتقاق الدوال المثلثية أخرى. وسنجرى الآن إشتقاق لإحدى الدوال المثلثية العكسية والتى يمكن على إثرها وبنفس الكفية إشتاق باقى الدوال المثلثية العكسية

فلنأخد مثلاً معكوس دالة الجيب

$$y = \sin^{-1}x$$

$$x = \sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dy/_{dx}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 x}}$$

وحيث أن

$$x = \sin y$$

فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

و أيضاً يمكننا إشتقاق معكوس دالة الظل على الصورة

$$y = tan^{-1}x$$

$$x = \tan y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2 y} = \frac{1}{1 + tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

6.7) الدوال الزائدية

الدوال المثلثية أو الدائرية مثل دوال الجيب (Sine) وجيب التمام(Cosine) والظل (Tangent) كما نعلم تمثل بإحداثيات نقطة على محيط دائرة الوحدة (نصف قطرها =1) والتى معادلتها هى ($x^2 +$ $y^2 = 1$) وبالمثل فهناك نوع أخر من الدوال يعرف بالدوال الزائدية تحقق نقطة على منحنى القطع الزائد وتعود تسميتها بالزائدية لأنها دوال مشتقة من دالة القطع الزائد ولأن لها خواص شبيهة جدا بالدوال المثلثية كما سيتبين لاحقا

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (7.11a)$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (7.11b)$$

بإعتبـار النقطـة (P) ذات الإحـداثيات (cosh x, sinh x) حيـث المتغيـر البـارامتري t لـيس زاويـة دائريـة، ولكنـه زاويـة زائديـة والتـي توضـح ضـعف المسـاحة بـين المحـور السـيني والقطـع الزائـدي والخـط المسـتقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة $(\cosh x, \sinh x)$ على القطع الزائد.

من المعروف أن معادلة القطع الزائد الذى يقع على محور الصادات حيث a=b=1 هى

$$x^2 - y^2 = 1$$

لنفرض أن

$$x = \cosh t$$

$$y = \sinh t$$

وعندما تتغير t من $-\infty$ إلى ∞ فإن النقطة P تكون قيمتها ضئيلة على القطع.

وبالمثل فى حالة الدوال المثلثية فإن الدوال الزائدية يكون لها مقلوبات وتكون على الصوره التالية

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{sinh\ x}$$

خصائص الدوال الزائدية

هنـاك العديـد مـن الخصـائص للـدوال الزائديـة والتـى تنطبـق مـع سـلوك دوال القطـع الزائـد مـن ناحيـة العمليات الرياضية عليها

$$cosh^2 x - sinh^2 x = 1$$

$$1 - tanh\ ^2 x = sech^2 x$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

$$\cosh \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cosh x}}{2}$$

$$coth^2 x - 1 = csch^2 x$$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

مشتقات الدوال الزائدية

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\sinh x = \cosh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة ل x فإننا نجد ما يلى

$$\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \ .\frac{\mathrm{d}}{dx}u$$

$$\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \,.\frac{d}{dx}\ u$$

$$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u \,.\frac{d}{dx}\ u$$

$$\frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u \,.\frac{d}{dx}u$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \,.\frac{d}{dx}\, u$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \,.\frac{d}{dx} u$$

تكامل الدوال الزائدية

$$\int \sinh u \;\, \mathrm{d}u = \cosh u + \mathrm{C}$$

$$\int \cosh u \;\, du = \sinh u + C$$

$$\int sech^2\, udu = tanhu + C$$

$$\int cschu^2\, du = -cothu + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -sechu + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

الدوال الزائدية العكسية

بما أن كلا من الدوال ($sinh\ ,tanh\ ,coth\ ,csch$) دوال احاد ةٌ فإن لها معكوس دالى وهو

$\sinh^{-1}$, $\tanh^{-1}$, $\coth^{-1}$, csch^{-1} على الترتيب

لكن كلا الدالتين cosh ,sech ليست دوال احادية لكن نستطع عن طريق تحديد نطاقهما ان نوجد المعكوس الدالى لهما.

نأخذ الفترة [0,∞] نطـاق ل cosh فعندئذ تصبح الدالـة احاد ةً و يكـون لهـا. $\cosh^{-1}$ بالمثل نأخذ الفتـرة [0,∞]نطاق ل sech فعندئذ تصبح الدالة احادية و يكون لها.$sech^{-1}$

$$y = \sinh^{-1}x \Leftrightarrow \sinh y = x$$

$$y = cosh^{-1}x \Leftrightarrow \cosh y = x$$

$$y = tanh^{-1}x \Leftrightarrow \tanh y = x$$

$$y = coth^{-1}x \Leftrightarrow \coth y = x$$

$$y = sech^{-1}x \Leftrightarrow \operatorname{sech} y = x$$

$$y = csch^{-1}x \Leftrightarrow \operatorname{csch} y = x$$

ويمكن أيضاً التعير عن الدوال الزائدة العكسية بدلالة اللوغاريتم الطبيعى

$$\sinh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$cosh^{-1}x = \left(\ln x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad x \ge 1$$

$$tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad -1 < x < 1$$

$$coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad x > 1$$

$$sech^{-1}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \qquad 0 < x \leq 1$$

$$csch^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \qquad x \neq 1$$

مشتقات الدوال الزائدية العكسية

$$\frac{d}{dx}\, sinh^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} . \frac{d}{dx}\, u$$

$$\frac{d}{dx}\, cosh^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} . \frac{d}{dx}\, u \qquad u > 1$$

$$\frac{d}{dx}\, tanh^{-1}u = \frac{1}{1-u^2} . \frac{d}{dx} u \qquad u < 1$$

$$\frac{d}{dx} coth^{-1}u = \frac{1}{1-u^2} . \frac{d}{dx}\, u \qquad u > 1$$

$$\frac{d}{dx} sech^{-1}u = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} . \frac{d}{dx}\, u \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d}{dx}\, csch^{-1}u = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} . \frac{d}{dx}\, u \qquad u \neq 0$$

(7.7 الدوال المركبة

تحدثنا سابقاً (الجزء الأول ، الفصل الأول) عن الأعداد المركبة وذكرنا أن العدد المركب يكون على الصورة

$$z = a + ib$$

فإذا كان كلا من a , b دوال مركبة فى المتغير x فإن المتغير z يسمى بالمتغير المركب. وتعتوى الدوال المركبة على متغيرات مركبة z على نفس الكيفية التى تحتوى بها الدوال الحقيقية على متغيرات حقيقية.

لنفرض الآن متسلسلة القوى ذات الإمتداد e^z حيث z هو العدد المركب والذى يوضع فى تلك الحاله على الصورة

$$z = (a + ib)x$$

إذن يمكن كتابة متسلسلة القوى e^z على الصوره

$$e^z = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx}$$

يمكننا الآن عمل المفكوك الخاص بمتسلسلة الدالة المركبة e^{ibx} على الصورة

$$e^{ibx} = 1 + ibx + \frac{(ibx)^2}{2!} + \frac{(ibx)^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + ibx + i^2\frac{(bx)^2}{2!} + i^3\frac{(bx)^3}{3!} + \cdots$$

وحيث أن $i^2 = -1$ فإن المعادلة السابقة تؤول إلى

$$1 + ibx - \frac{(bx)^2}{2!} - i\frac{(bx)^3}{3!} + \frac{(bx)^4}{4!} + i\frac{(bx)^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{(bx)^2}{2!} + \frac{(bx)^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(bx - \frac{(bx)^3}{3!} + \frac{(bx)^5}{5!} - \cdots\right)$$

وحيث أن مفكوك دالتى الجيب وجيب التمام يكون على الصوره

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

وثم فإن متسلسلة القوى تؤول إلى

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) \qquad (7.12)$$

والتى تمثل الصورة العامة لصيغة أولير

الباب الثامن

النهايات والإتصال

الباب الثامن

النـهايات والإتصال

1.8) الدوال

تعرف الدالة بأنها علاقة بين متغيرين أحدهما متغير مستقل (يتغير أولاً) والآخر متغير تـابع (يتغير ثانياً). أو يمكن وضع تعريف الدالة على الصورة هي علاقة تربط بين عناصر مجموعتين بحيث كل عنصر في احدهما يرتبط بعنصر واحد فقط في الأخرى.

والدالة فى صورتها العامة تأخذ الشكل :

$$y = f(x) \qquad (8.1)$$

وتقرأ : (y) دالـة فـى (x). أى أن التغير فـى ص يتبـع التغيـر الـذى يطـرأ علـى (y). لـذلك فـإن (x) يسـمى المتغيـر المسـتقل، (y) يسـمى المتغيـر التابع.وتسـمى المجموعـة (X)بالنطـاق والمجموعـة(Y) بالنطـاق المصاحب.

نطاق الدالة هو قيم x التي تكون عندها الدالة معرفة [لها قيمة محدودة ومعرفة] أو هو تلك المجموعة غير الخالية التي يراد إيجاد قيم أو صور الدالة لكل عنصر فيها.

يقال أن الدالة $f(x)$ التي نطاقها D_f أنها زوجية إذا تحقق الشرط التالي:

$$f(-x) = f(x) \qquad (8.2)$$

ومن ثم فإن منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلا حول المحور الرأسي (Y).

يقال أن الدالة *f(x)* التي نطاقها D_f أنها فردية إذا تحقق الشرط التالي

$$f(-x) = -f(x) \qquad (8.3)$$

ومن ثم فإن منحنى الدالة الفردية يكون متماثلا حول نقطة الأصل.

خلاف ذلك الدالة ليست زوجية ولا فردية

إذا كانت f, g دالتين فعندئذ يكون بالامكان إجراء العمليات الجبرية المختلفة على هاتين الدالتين لإنشاء دوال أخرى جديدة.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{(f+g)} = D_f \cap D_g$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{(f-g)} = D_f \cap D_g$
$(f.g)(x) = f(x).g(x)$	$D_{(f.g)} = D_f \cap D_g$
$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$	$D_{(f/g)} = \{x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0\}$

2.8) تركيب الدوال

ليكن A و B جزئين من مجموعة الأعداد الحقيقة R وليكن لدينا الدالتين

$$f: A \to B, \qquad g: B \to R$$

نعرف حينئذ التركيب $gof: A \to R$ بالعلاقة

$$\forall x \in A, \ (gof)(x) = g(f(x)) \qquad (8.4)$$

3.8) الدالة المحدودة

ليكن A جزءاً من مجموعة الأعداد الحقيقية R و $f: A \to R$ نقول على الدالة f إنها محدودة إذا وجد ثابت $M > 0$ بحيث

$$\forall x \in A, \quad |f(x)| \leq M \qquad (8.5)$$

وعندما تكون الدالة f محدوده فإن المجموعة $f(A)$ المحتواة فى R محدودة ومن ثم فهى تقبل حداً أدنى وحداً أعلى ويرمز لهما $\inf f$ و $\sup f$ على التوالى.

4.8) الدالة الدورية

إذا كان $f: R \to R$ فإن الدالة f تكون دالة دورية إذا وجد عدد حقيقى φ لا يساوى الصفر يحقق العلاقة التالية

$$\forall x \in R, \qquad f(x) = f(x + \varphi) \qquad (8.6)$$

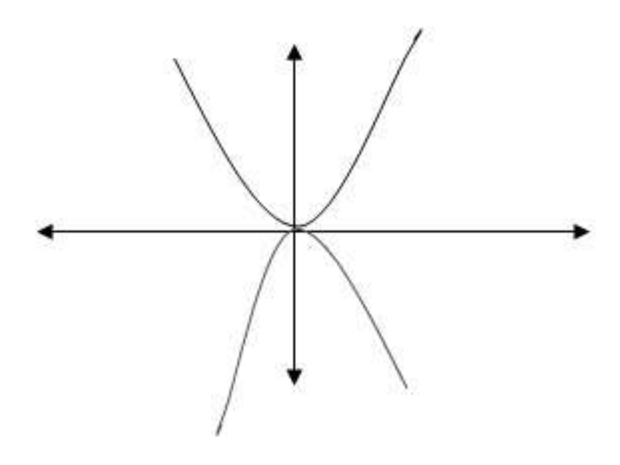
ويسمى العدد φ بدورة الدالة f

5.8) الدالة التربيعية

الصورة العامة للمعادلة التربعية

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (8.7)$$

وترسم كمنحنى من الدرجة الثانية



شكل (8-1) : تمثيل معادلة الدرجة الثانية

وهى تمثل فى هذه الحالة معادلة قطع مكافئ

والدالة التربيعية حالة خاصة من كثيرات الحدود على الصورة:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

حيث $a \neq 0$، n عدد صحيح موجب أو صفر، a_i عبارة عن مقادير ثابتة حيث

. $i = 1,2,3,\ldots,n$

6.8) النهايات

تعتبر نهاية دالة إحدى المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي، وبشكل عام يمكن القول أن : الدالة f لها نهاية L عند النقطة $p,$ مما يعني أن القيم التي تأخذها الدالة f تقترب بشكل كبير من القيمة L عند النقاط القريبة من p أو عندما يقترب المتغير المستقل x بشكل كبير من $p.$

لنفترض أن الدالة $(f(x))$ هي دالة حقيقية وأن a عدد حقيقي أيضا عندئذ نقول:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (8.8)$$

مما يعني أن الدالة $f(x)$ تكون قريبة جدا حسبما نريد من L عندما تقترب x من العدد a ونعبر عن ذلك لغة (أن نهاية $f(x)$, عندما تقترب x من a هي L.)

وغالباً ما تكون الدالة $\left(f(x)\right)$ غير معرفه عند $a = x$

ويمكن أن تكون الدالة لها نهاية يسرا أو نهاية يمنا، فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا دالة ما $\lim_{x \to a} f(x)$ فعندما تؤول (x) إلى (a) وتكون (x) أكبر من (a) (أى نهاية يمنا) وعندما تؤول (x) إلى (a) وتكون (x) أقل من (a) (أى نهاية يسرا). فيمكننا كتابة النهاية على الصورة التالية

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \qquad\qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

i) العمليات على النهايات

تحديد نهاية الدوال يمكن أن يكون يسيراً وذلك عن طريق وضعها فى صورة نظريات عامة.

نهاية الدالة الثابة

$$\lim_{x \to c} c = c \qquad (8.9)$$

نهاية المعادلة الخطية تكون على الصورة

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b \qquad (8.10)$$

إذا كانت $f(x)$ دالة متعددة الحدود فإن

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (8.11)$$

إذا كان $g(x)$ و $f(x)$ دالتان فى (x) فإن

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$ جمع النهايات

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$ حاصل ضرب النهايات

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x(}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$ حاصل قسمة نهايتين

7.8) الإتصال

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح مركزه هو x_0 حيث $x_0 \in R$

فإننا نقول أن f دالة متصلة إذا كان و فقط كان

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ونقول بأن الدالة f متصلة على اليمين إذا كان وفقط كان

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

ونقول بأن الدالة f متصلة على اليسار إذا كان وفقط كان

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

الباب التاسع

الإشتقاق

الباب التاسع

الإشتقاق

1.9) المشتقة

تعتبر الركيزة الأساسية لحساب التفاضل هو درسة معدل التغير لدالة ما بالنسبة لمتغير مستقل.

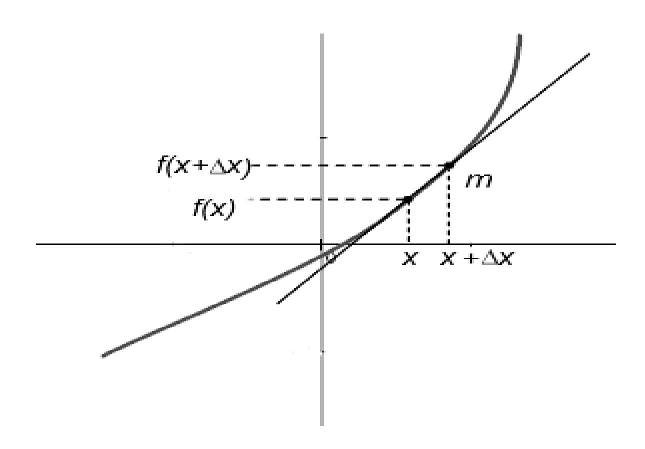
$$y = f(x) \qquad (9.1)$$

التغير اللحظى فى الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x يمكن أن يعطى بميل المماس لمنحنى الدالـة عند المتغير x كما بالشكل (1.9) . وتكتب معادلة المماس على الصورة

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}$$

$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (9.2)$$

حيث تمثل $f(x)$ معدل التغير اللحظى فى x



شكل (1.9) : التغير اللحظى فى الدالة f(x)

وعندما تكون Δx صغير (أى تؤول إلى الصفر) يمكننا كتابة المعادلة (2.4) فى صورة النهاية على الشكل

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (9.3)$$

ويعرف التغير فى المعامل y بالنسبة للمعامل x بالاشتقاق. وهناك أشكال رياضية متعددة يمكن التعبير بها عن اشتقاق متغير ما كالأتى

$$\frac{dy}{dx} \quad , \qquad f'(x) \quad , \quad y' \qquad , \quad \frac{d}{dx} f(x)$$

ملحوظة: لإشتقاق أى دالة لابد أن تكون الدالة مستمره وتحت هذا الشرط يمكننا القول بأنه ليس كل الدوال قابله للشتقاق و أيضاً فليس كل الدوال المستمره قابله للإشتقاق.

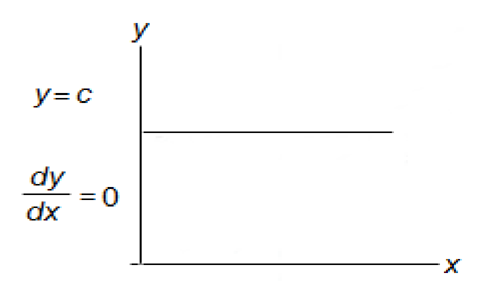
2.9) قواعد الإشتقاق

هناك العديد من القواعد المستخدمة فى عمليات حساب الإشتقاق وبيانها كالأتى

إذا إفترضنا أن

$$y = c$$

حيث c عدد ثابت. فإن معدل تغير الدالة بالنسبة للمتغير x يساوى الصفر. أى أن تفاض القيمة الثابتة يساوى صفر.



شكل (2.9) : معدل التغير بالنسبة للدالة الثابتة

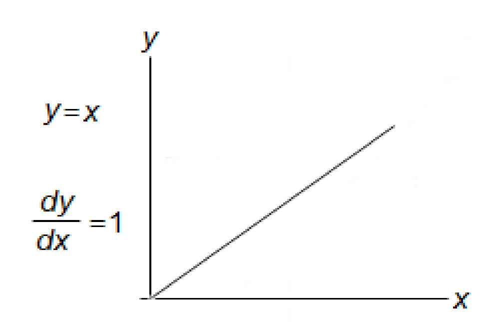
و إذا كان

$$y = x$$

فإن معدل تفاضل الدالة y بالنسبة للمتغير x يساوى الوحده (أى يساوى واحد). ويمكننا إثبات ذلك رياضياً كالآتى

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$



وهناك أيضاً أحد الطرق الهامه لإشتقاق الدوال ذات الدرجات العليا فعلي سبيل المثال

$$y = x^n$$

فإن إشتقاق مثل تلك الدوال يكون على الصوره

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \qquad (9.5)$$

ويمكننا إجراء الإشتقاق لحاصل جمع دالتين على الصوره

$$y = \left(f(x) + g(x)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \qquad (9.6)$$

و أيضا قاعدة الإشتقاق لحاصل ضرب دالتين

$$y = \left(f(x)g(x)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx} \qquad (9.7)$$

ولإشتقاق حصل قسمة دالتين

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)\frac{df}{dx} - f(x)\frac{dg}{dx}}{\left(g(x)\right)^2} \qquad (9.8)$$

وتعتبر قاعدة السلسلة إحدى أهم طرق الإشتاق للدوال وتنصل على ما يلى:

اذا كانت هناك علاقة غير مباشرة بين متغيرين x ، y كما توجد علاقة مباشرة بين احدهما y ومتغير اخر u فانه توجد علاقة غير مباشرة بين المتغير الاول x والمتغير الاخير y ويكون تفاضل س بالنسبة لـ ع يساوى تفاضل س بالنسبة لـ ص مضروبا فى تفاضل ص بالنسبة لـ ع وتستخدم قاعدة السلسلة عندما نريد معرفة تأثير كل متغير (عامل) مستقل بمفرده على المتغير التابع

$$y = f(u)$$

$$u = g(x)$$

فإن الاشتقاق يعطى على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad (9.9)$$

وهناك أيضاً قاعدة لإشتقاق دالة بالنسبة لأخرى

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} \qquad (9.10)$$

وهناك أيضا قاعدة القوى لإشتقاق الدوال وتعطى صورتها على الشكل

$$y = \big(f(x)\big)^n$$

$$\frac{dy}{dx} = n\big(f(x)\big)^{n-1}\frac{d}{dx}f(x) \qquad (9.11)$$

3.9) المشتقات ذات الرتب العليا

إذا كانت $y = f(x)$ دالة تتوافر فيها شروط الاشتقاق فان مشتقتها الأولى هى $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ وتمثل دالة جديده. والدالة الجديده هذه إذا توافرت فيها شروط الاشتقاق أيضاً فإن مشتقها دالة جديدة وتعطى على الشكل $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ وتسمى المشتقة الثانية للدالة. وإذا توافرت فى الدلة الأخيره أيضاً شروط الاشتقاق فإن مشتقتها تسمى المشتقة الثالثة وتكتب على الصوره $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$. وعلى هذا المنوال يمكن ايجاد مشتقات متتالية وبدءاً من المشتقة الثانية يطلق على هذه المشتقات بالمشتقات العليا وتكتب المشتقة من الرتبة n على الصورة

$$y^n = \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$$

وتكتب الرموز المختلفة للمشتقات المتتالية كما يأتي

$$f'(x), f''(x), f''(x),\ f^{(4)}(x) \ldots\ f^{(n)}(x)$$

$$y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots\ y^{(n)}$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

ومن تعريف المشتقات العليا يتضح لنا أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

وأيضاً

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

وهكذا فإن

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \qquad (9.12)$$

4.9) القيم العظمى والصغرى

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فيقال إن لهذه الدالة قيمة عظمى محلية عند نقطة $x\epsilon_{\circ}$ $[a, b]$ إذا امكن إيجاد جوار $\cup\,(x_{\circ}\,)$ لنقطة $x_{\circ}$ بحيث يكون:

$$[f(x) \leq f(x_1\,); \forall x \in\cup\,(x_1\,) \cap [a, b] \qquad (9.13)$$

ويقال إن لهذه الدالة قيمة صغرى محليه عند نقطة $X_1 \in [a, b]$

إذا أمكن إيجاد جوار $V(x_1)$ للنقطة x_1 بحيث يكون:

$$f(x) \geq f(x_1): \forall X \in V(x_1) \cap [a, b] \qquad (9.13)$$

ذ- إذا كانت $y = f(x)$ معرفة على الفترة المغلقة من $[a, b]$ وقابله للاشتقاق عند نقطة القيمة العظمى (الصغرى) المحلية $x_0 \in [a, b]$ فإن:

$$f'(x_o) = 0$$

وتعرف تلك النظرية بنظرية فيرما

ومن ناحية أخرى فإن عكسة نظرية فيرما ليس بالضروره صحيح أى أنه إذا كانت $y = f(x)$ معرفة على الفتره المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق عند نقطة $x_0 \in [a, b]$ وكانت $f'(x) = 0$ فليس من الضروري إن تكون (x_o) قيمة عظمى أو صغرى محليه للدالة (f).

خواص هامه

1. القيمة العظمى (الصغرى) لدالة هى أكبر (أصغر) قيمة للدالة على الفترة المعرفة$[a, b]$.
2. النقط الحرجة *Critical Points* هى النقط التى تكون عندها مشتقة الدالة تساوى صفراً (أى أن ميل المماس لمنحنى الدالة صفر)، وتتميز هذه النقاط هى أنها النقاط التى يمكن عندها أن تكون هنالك قيم قصوى أو صغرى أو نقط أنقلاب.
3. نقط الأنقلاب هى النقط التى يغير عندها المنحنى تقرعه للداخل أو الخارج (ستكون بشكل أوضح عند التطبيق بالرسم).
4. إذ كانت مشتقة الدالة $f'>0$ إذاً نستطيع القول بثقة أن الدالة فى حالة تزايد (أى أنها ستمر بأعلى قيمة لها ثم قد تعاود الهبوط) والعكس صحيح بمعنى أنه لو كانت $f' < 0$ فأنها فى حالة تناقص.
5. فى حالة كانت الدالة تفاضلية للدرجة الثانية وكانت $f'' > 0$ فإن الدالة تكون مقعرة لأعلى $(y = x^2)$، والعكس صحيح $f'' < 0$ فإن الدالة تكون مقعرة لأسفل $(y = -x^2)$.
6. لا يمكن أن تكون هنالك فى دوال المتغير الواحد نقطى نهاية عظمى على التوالى قط، بل أن يجب أن تمر أولاً على قيمة صغرى لتعاود الزيادة مجدداً

5.9) الإشتقاق الجزئى

هي دالة رياضية لعدة متغيرات مستقلة و مشتقها بالنسبة لأحد هذه المتغيرات مع إبقاء باقي المتغيرات ثابتة. فمثلاً المشتقة الجزئية للدالة $f(x, y)$ بالنسبة للمتغير x هي نفس المشتقة الاعتيادية

للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير x وذلك بإعتبار y ثابت وتكتب $f_x, \frac{\partial f}{\partial x}$ و المشتقة الجزئية للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير y هي نفس المشتقة الاعتيادية للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير y وذلك باعتبار x ثابت وتكتب $f_y, \frac{\partial f}{\partial y}$

اذا كانت الدالة $f(x,y)$ لها مشتقات جزئية فان $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ هي نفسها دوال ويمكن ان يكون لها مشتقات جزئية ، هذه المشتقات الثانية تأخذ الرموز

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

6.9) قاعدة السلسلة

لنفرض أن x دالة فى المتغيرين u وv وأن y هى دالة أخرى فى نفس المتغيريين u و v و إذا كان z دالة فى x وy فإن z ستكون بالطبع دالة فى u وv.

$$x = x(u,v)$$

$$y = y(u,v)$$

$$z = z(x,y) = z(u,v)$$

فإن معدل التغير فى z مع u ومعدل تغير z مع v يعطى بقاعدة السلسلة على الصوره

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (9.14)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad (9.15$$

إذا كان

$$F(x,y) = 0$$

حيث

$$y = f(x)$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F/_{\partial x}}{\partial F/_{\partial y}} \qquad (9.16)$$

وإذا كان

$$F(x, y, z) = 0$$

حيث

$$z = f(x, y)$$

إذن

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F/_{\partial x}}{\partial F/_{\partial z}} \qquad (9.17)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F/_{\partial y}}{\partial F/_{\partial z}} \qquad (9.18)$$

قاعدة ليبنز للتفاضل (التفاضل تحت علامة التكامل)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{a}^{b} f(x, t)dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx \qquad (9.19)$$

7.9) الزيادات والفروق

لنفرض أن

$$z = f(x,y)$$

ولنفرض أن لدينا نقطة ما $f(x_1, y_1)$ و معدل الزياده بها هو $\Delta x, \Delta y$ فإن

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)$$

بإضافة وطرح $f(x_1, y_1 + \Delta y)$ نحصل على

$$\Delta z = \big(f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1 + \Delta y)\big)$$
$$- \big(f(x_1, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)\big) \qquad (9.20)$$

y_1 تتغير بتغير Δy x_1 تتغير بتغير Δx

وتظل x ثابتة عند x_1 وتظل y ثابتة بثبوت y_1

بإستخدام نظرية القيمة المتوسطة

$$\frac{\big(f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1 + \Delta y)\big)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} f(c_x, y_1 + \Delta y)$$

و

$$\frac{\big(f(x_1, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)\big)}{\Delta y} = \frac{\partial}{\partial y} f\big(x_1, c_y\big)$$

ويمكننا إعادة كتابة المعادلتين السابقتين على الصورة

$$\left(f(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y) - f(x_1, y_1+\Delta y)\right) = \frac{\partial}{\partial x} f(c_x, y_1+\Delta y)\Delta x$$

$$\left(f(x_1, y_1+\Delta y) - f(x_1, y_1)\right) = \frac{\partial}{\partial y} f\left(x_1, c_y\right)\Delta y$$

ومن ثم فإن المعادلة (9.20) يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$\Delta z = \frac{\partial}{\partial x} f(c_x, y_1+\Delta y)\Delta x + \frac{\partial}{\partial y} f\left(x_1, c_y\right)\Delta y$$

وعندما تؤول كلاً من Δx و Δy إلى الصفر فإن

$$\frac{\partial}{\partial x} f(c_x, y_1+\Delta y) \to \frac{\partial}{\partial x} f(x_1, y_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f\left(x_1, c_y\right) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_1, y_1) \qquad (9.21)$$

$$dx \approx \Delta x, dy \approx \Delta y, dz \approx \Delta z$$

إذن

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{dy} dy \qquad (9.22)$$

أى أن معدل التغير فى z يساوى معدل التغير فى z بالنسبة إلى Δx بالإضافة إلى معدل z بالنسبة إلى y

الباب العاشر

التكامل

الباب العاشر

التكامل

1.10) التكامل

في علم الرياضيات ينقسم التكامل إلى جزئين: التكامل المحدود والتكامل الغير محدود. يتعلق التكامل المحدود بحساب الاطوال، المساحات، المنحنيات، مراكز الثقل وما إلى ذلك من الدوال التي لها تطبيقات في شتى العلوم. من جهة أخرى يركز التكامل الغير محدود على إيجاد المعكوس الرياضي للتفاضل ولهذا السبب يسمى أيضا بالاشتقاق العكسي.

2.10) التكامل المحدود

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و a,b عنصران فى I ولتكن F و G دالتين أصلتين للدالة f على I

ومن المعلوم أن

$$G(x) = F(x) + c$$

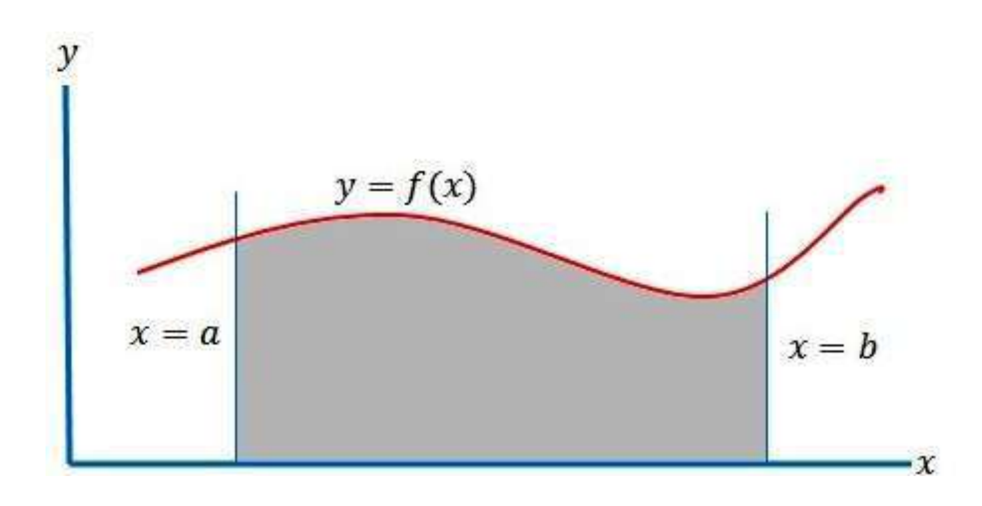
$$x \in I$$

إذن

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(a) - F(b) \qquad (10.1)$$

وبالتالى العدد $F(b) - F(a)$ غير مرتبطه بالدالة الأصلية f .

هذا العدد يسمى تكامل f من a إلى b ونرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ يقراء تكامل من a إلى b للدالة $f(x)$



شكل (1-10) : *التكامل المحدود*

خصائص التكامل المحدود

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ تساوى الحد الأدنى و الأعلى
2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ تبدى حدى التكامل
3. $\int_a^b f(x+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ حيث λ عدد ثابت.
5. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

3.10) التكامل الغير محدود

يعطى التكامل الغير محدود لتابع $f(x)$ رياضي بالعلاقة

$$\int f(x) = F(x) + c \qquad (10.2)$$

حيث

$$F'(c) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

4.10) خواص التكامل الغير المحدود

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+x} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

5.10) طرق تكاملية

1. التكامل بالتعويض

يعتبر التكامل بالتعويض و إستبدال المتغير أحد أكثر الطرق شيوعاً فى علم التكامل ويمكن وصف العملية الرياضية لذلك التكامل كالأتى

لنعتبر صورة التكامل

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx$$

لنفرض أن

$$u = g(x)$$

إذن نجد أن

$$g'(x) = du$$

ومن ثم يمكننا التعويض فى المعادلة الأولى عن قيمتى $g(x),\ g'(x)$ فنحصل على

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = f(u)du$$

$$= F(u) + c = F\big(g(x)\big) + c \qquad (10.3)$$

2. التكامل بالتجزئ

يستخدم التكامل بالتجزئ عندما تكون الكميات المتكاملة ليست على الصورة القياسية وتستخدم هذه الصيغة لنقل التكامل إلى شكل آخر بحيث يكون سهل الحساب ويمكن أن تستخدم من اليمين لليسار والعكس. وتعتمد تلك الطريقة على معالجة الكميات المتكاملة كحاصل ضرب دالة فى تفاضل دالة أخرى. ويمكننا التعبير عن ذلك رياضياً كالآتى

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

بإعادة ترتيب حدود المعادلة السابقة و أخذ $f(x)g'(x)$ بطرف مستقل

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) - g(x)f'(x)$$

بإجراء التكامل على المعادلة السابقة

$$\int f(x)g'(x) = \big(f(x)g(x)\big) - \int g(x)f'(x)$$

حيث نجد أن الحد الأول من الطرف الأيمن من المعادلة السابقة خالى من علامة التكامل نظراً لان هذا الحد كان فى صورته التفاضلية ومن المعروف أن علامتى التفاضل والتكامل تلغى كل منهما الأخرى.

بفرض أن

$$u = f(x) \Longrightarrow du = f'(x)$$

$$v = g(x) \Longrightarrow du = g'(x)$$

إذن نجد أن

$$\int f(x)g'(x) = \big(f(x)g(x)\big) - \int g(x)f'(x)$$

$$\Longrightarrow \int udv = uv - \int vdu \qquad (10.4)$$

وتعنى تلك المعادلة أن تكامل حاصل الضرب لدالتين ما هو عبارة عن الدالة الأولى فى تكامل الدالة الثانية مطروح منه تكامل حصل ضرب تفاضل الدالة الأولى فى تكامل الدالة الثانية.

مثال: أوجد ناتج التكاملات التالية

-1

$$\int xe^{x}dx$$

-2

$$\int \ln xdx$$

-3

$$\int e^{x}\sin x\,dx$$

-4

$$\int \sec^{3} xdx$$

الحل

-1

بوضع

$$u = x, \quad dv = e^x dx$$

ومن ثم نجد أن

$$du = dx, \quad v = \int e^x dx = e^x$$

وبتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئ نجد أن

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

-2

لنفرض أن

$$u = x \Longrightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Longrightarrow v = x$$

إذن

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

-3

لنفرض أن

$$u = e^x \Longrightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \sin x dx \Longrightarrow v = -\cos x$$

إذن

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

ولنبد الآن بحساب الجزء الثانى من التكامل أيضاً بطريقة التجزئ

بفرض

$$u = e^x \Longrightarrow \; du = e^x dx$$

$$dv = \cos x dx \Longrightarrow v = \sin x$$

إذن

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

إذن

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x sinx - \int e^x \sin x dx$$

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\cos x - sinx) + c$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x - sinx) + c$$

-4

لنفرض أن

$$u = \sec x \Longrightarrow du = \sec x \tan x dx$$

$$dv = sec^3xdx \Longrightarrow v = \tan x$$

إذن

$$\int \sec^3 xdx = \sec x \tan x - \int \sec x\tan^2 x\, dx$$

وبالمثل يتم إجراء التكامل بالتجزئ للجزء $\int \sec x\tan^2 x\, dx$

إذن

$$\int \sec^3 xdx = \sec x \tan x - \int \sec^3 xdx + \int \sec xdx$$

$$\int \sec^3 xdx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \int \sec xdx)$$

3. التكامل عن طريق التعويض بالدوال المثلثية

عندما تحتوى الكميات المتكاملة على تعبيرات رياضية على صورة مثل الأشكال التالية

$$a^2 - x^2 \quad , \qquad a^2 + x^2 \, , \; x^2 - a^2$$

ويكون من الصعب تكامها بإستخدام الطرق التكاملية المباشرة ففى هذة الحالة يمكن إستخدام طريقة التكامل بإستخدام الدوال المثلثية كالآتى

التعبير الرياضى	الدالة المثلثية المستخدمة فى التعويض عنه
a^2-x^2	$x = a\sin\theta$
a^2+x^2	$x = a\tan\theta$
x^2-a^2	$x = a\sec\theta$

والتعويضات المستخدمة تعتبر إختيارية حسب ما تقتضية المسائل المختلفة. وبعد إجراء التعويض لابد من إدراج الحد التفاضلى للداله (θ) والذى يستخدم فى التعويض عن الحد (dx) فعلى سبيل المثال

إذا كان

$$x = a\sin\theta$$

فإن

$$dx = a\cos\theta \, d\theta$$

4. التكامل بالكسور الجزئية

هذه الطريقة تستخدم لتكامل دالة قياسية كسرية عن طريق تحويلها لعدة كسور جزئية ومن ثم تكامل كل كسر منها على حد. فعندما يكون البسط والمقام كسر يحتوى على كثير الحدود بحيث تكون درجة البسط أقل من درجة المقام. فى هذه الحالة يمكننا التعبير عن الدالة الكسرية بواسطة مجموع كسرين جزئيين أو أكثر. وتكون تجزئة الدالة الكسرية إلى كسور جزئية عن طريق التعبير عن المقام بواسطة حدود المعاملات.

فعلى سبيل المثال

$$(ax+b)^n = \frac{A_1}{px+q} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px+q)^2} \qquad (10.5)$$

حيث $n \geq 1$

$$(a^2+bx+c)^m$$

$$= \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n} \qquad (10.6)$$

حيث $m \geq 1$ ولا توجد قيم جذرية

والقيم $A_1, \quad A_2 \ldots$ ثوابت

تفكيك الدالة المتكاملة عن طريق الكسور الجزئية تمكننا من تحويل التعبيرات الرياضية المعقدة إلى مجموع تعبيرات رياضية بسيطة بحيث يكون كل من تلك التعبيرات سهل التكامل على حدا.

مثال: أوجد التكاملات الآتية

-1

$$\int \frac{x^4-x^3+4x-2}{x-2}$$

-2

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

-3

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

-4

$$\int \frac{dx}{x^3 + x}$$

الحل:

-1

بالقسمة المطولة نحصل على مايلى

$$x - 2 \frac{x^3 + x^2 + 2 + 8}{x^4 - x^3 + 4x - 2}$$

$$\frac{x^4 - 2x^3}{x^3 + 4x}$$

$$\frac{x^4 - 2x^3}{2x^2 + 4x}$$

$$\frac{2x^2 - 4x}{8x - 2}$$

$$\frac{8x - 16}{14}$$

$$\frac{x^4 - x^3 + 4x - 2}{x - 2} = x^3 + x^2 2x + 8 + \frac{14}{x - 2}$$

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 4x - 2}{x - 2} = \int (x^3 + x^2 2x + 8) dx + \int \frac{14}{x - 2} dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + x^2 + 8x + 14 \ln|x - 2| + c$$

-2

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

بالضرب فى $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ نجد أن

$$1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

بوضع $x = 1$ نجد أن $A = \frac{1}{2}$

بوضع $x = 2$ نجد أن $B = -1$

بوضع $x = 3$ نجد أن $C = \frac{1}{2}$

إذن

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{-1}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-3}$$

ومن ثم نجد أن

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + (-1)\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + c$$

$$= \ln\left|\frac{[(x-1)(x-3)]^{\frac{1}{2}}}{(x-2)}\right| + c$$

-3

$$\frac{1}{x(1-x)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

بالضرب فى $x(1-x)^2$

$$1 = A(1-x)^2 + Bx(x-1) + cx$$

بوضع $x = 0$ نجد أن $A = 1$

بوضع $x = 1$ نجد أن $C = 1$

بوضع $x = 2$ نجد أن $B = -1$

إذن

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + c$$

حيث c مقدار ثابت

-4

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

بضرب طرفى المعادلة فى $x(x^2+1)$

$$1 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

$$= Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$= (A+B)x^2 + Cx + A$$

ويمكننا الحصول على الثوابت A, B, C كما يلى

$$A + B = 0 \Longrightarrow A = -B$$

$$C = 0, \qquad A = 1, \qquad B = -1$$

ومن ثم نجد أن

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-x}{x^2+1}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$$

5. التكامل التربيعى

أى معادلة تربيعية يتم العبيرعنها كمجموع أو فرق بين مربعين وهذه العملية تكون ضرورية حين إجراء التكامل لكثيرة الحدود ذات الدرجه الثانية . من العروف أن الصوره العامة لكثيرة الحدود من الدرجة الثانية هى

$$y = ax^2 + bx + c$$

إذا كانت كثيرة الحدود لا يمكن تحليلها (أى ليس لها جزور) فبالتالى يكون من المستحيل التعبير عنها كحاصل ضرب معاملين كما هو المعهود بالنسبة لكثيرات الحدود من الدرجة الثانية. ولكننا يمكننا كتابة مثل ذلك النوع من كثيرات الحدود كالآتى

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

يمكن بعد ذلك إستخدام طريقة التعويض والتى من خلالها يمكن وضع المعادلة فى صورة قياسية يسهل تكاملها.

6.10) الصيغ الغير محدوده (قاعدة لوبيتال)

بإعتبار تعريف الدالة التفاضلية $f(x)$ فى صزرة النهايات كالآتى

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

كما هو ملاحظ أن خارج القسمة له شكل غير محدد ${}^{0}/_{0}$ وذلك عندما تؤول Δx إلـى الصفـر. وبالمثل أيضـاً

فإن الشكل غير المحدد للدالة يظهر أيضاً عندما يؤول البسط والمقالم إلى مالانهاية

يمكننا إستخدام قاعدة لوبيتـال لحسـاب نهايـة خـاج القسـمة للقيم الغيـر محـددة (${}^{0}/_{0}$ أو ${}^{\infty}/_{\infty}$) وذلك عنـدما

تكون قيمة المتغير x مساية لأرقام حقيقية. وتعرف قاعدة لوبيتال للنهاية عندما تؤول x إلى a كالآتى

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وفى الحالات التى يكون فيها

$$f(x)g(x)=0.\infty$$

وذلك عندما تؤول x إلى a فإن قاعدة لوبيتال تظل مستخدمة لحل مثل تلك المسائل

$$\lim_{x\to}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{{}^{1}/_{g(x)}}=\frac{0}{0}$$

وبنفس الكيفية بالنسبة إلى

$$(x)g(x)=\infty.0$$

عندما تؤول x إلى a

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{{}^{1}/_{g(x)}}=\frac{\infty}{\infty}$$

وفى حالة أخرى، إذا كان

$$f(x) - g(x) = \infty - \infty$$

عندما تؤول x إلى a

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} \frac{\big(f(x) - g(x)\big) f(x) g(x)}{f(x) g(x)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\left({}^{1}\!/_{g(x)} - {}^{1}\!/_{f(x)} \right)}{{}^{1}\!/_{\big(f(x) g(x)\big)}} = \frac{0}{0}$$

وبالنسبة للتعبيرات الرياضية التى تحتوى نهاياتها على قيم من الأنواع $0^0, 1^\infty, \infty^0$ يمكن إستخدام دالة اللوغارتم للحصول على صيغة مناسبة لقاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\ln f(x)}{{}^{1}\!/_{g(x)}} \qquad (10.7)$$

ملحوظة : قاعدة لوبيتال يمكن أن تستخدم لمرات عديدة للوصول إلى صيغة مناسبة التى تمكننا من تحديد النهاية وكيفية حلها.

7.10) التكاملات المعتلة

هناك العديد من التكاملات التى يكون فيها التكامل لدالة ما على فترة غير محدودة وتكون الصورة الرياضية لمثل تلك الأنواع من التكاملات على الشكل التالى

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to a}\int_a^x f(x)dx$$

وتكتب الصورة العامة للتكامل عندما تؤول النهاية إلى $-\infty$ بنفسة الكيفية أيضاً عندما تكون هذه النهاية موجودة يقال بأن التكامل المعتل تقاربى وعلى النقيض فإذا كانت النهاية غير موجودة فإن التكامل المعتل يسمى تباعدى.

وفى الحالات التى تكون فيها الدالة المتكاملة غير مستمرة على حدود التكامل (ولتكن c) يعبر عن التكامل بواسطة مجموع تكاملين على النهاية الغير محدودة

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

حيث أن

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(x)dx$$

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_x^b f(x)dx \qquad (10.8)$$

إختبار المقارنة للتكامل المعتل

إذا كانت f و g دالتين متصلتين على الفترة $[a,\infty]$ وكان

$$0 \le f(x) \le g(x)\ \forall\ x \in [a,\infty]$$

فإذا كان

$\int_a^\infty g(x)dx$ متقارباً فإن $\int_a^\infty f(x)dx$ يكون متباعداً والعكس صحيح.

مثال: إحسب ناتج التكاملات الآتية

-1

$$\int_1^\infty e^{-x}dx$$

-2

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

-3

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$$

حيث $n \neq 1$

-4

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

-5

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

الحل:

-1

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} [-e^{-x}] \begin{matrix} b \\ 1 \end{matrix}$$

$$= \lim_{b\to\infty} [-e^{-b} + e^{-1}] = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{e^b}\right] + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{e}\right] = 0 + \frac{1}{e} = e^{-1}$$

-2

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln|x|]_1^b$$

ونظراً لأن النهاية غير موجودة فإن التكامل المطلوب حسابة يكون متباعداً

-3

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right) \begin{matrix} b \\ 1 \end{matrix}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1-n}\right) = \frac{1}{1-n} \lim_{b\to\infty} (b^{1-n} - 1) = f(x)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & n > 1 \\ \infty, & n < 1 \end{cases}$$

وبالنظر إلى الفقرتين (2) و(3) من المثال يمكننا إستنتاج أن

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$ يكون متقارباً إذا كان $n > 1$ و يكون متباعداً إذا كان $n \leq 1$

-4

حيث أنه لكل عنصر x ينتمى للفتره $[1,\infty]$ فإن

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ومن ثم يمكننا الإستنتاج أن

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

يكون متقارباً وذلك نظراً لأن

$$n = \frac{3}{2} > 1$$

وبذلك نجد أن $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ يكون متقارباً أيضاً وذلك من إختبار المقارنة

-5

حيث أن

$$1 + x = \sqrt{1+2x+x^2} \geq \sqrt{1+x^2}, \qquad \forall\, x \in (2,\infty)$$

فإن

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

وبما أن $\int_2^{\infty} \frac{1}{1+x}$ متباعداً فإن $\int_2^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$ يكون أيضاَ متباعداً

مثال : إحسب التكامل التالى

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

الحل

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}(x+1)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}(b+1) - \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

وبالمثل

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}(x+1)\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}(1) - \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}(a+1)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi}{4}$$

إذن

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} = 3\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

التمارين :

إحسب قيم التكاملات الآتية

-1 $\int xe^{3x}dx$ -2 $\int x^2 \ln x dx$

-3 $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ -4 $\int x\, 5^x dx$

-5 $\int e^{3x}\sin(2x)dx$ -6 $\int sin^4 x dx$

-7 $\int x \sinh x dx$ -8 $\int \cos(\ln x)\, dx$

-9 $\int \frac{x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ -10 $\int \frac{x}{(x-4)^4} dx$

11- $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

12- $\int \frac{x^3}{(x-1)^3}$

13- $\int \frac{xdx}{x^4-1}$

14- $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}$

15- $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^3+4x} dx$

16- $\int \frac{5x^2+11x+17}{x^3+5x^2+4x+20} dx$

17- $\int \frac{x^6-x^3+1}{x^4+9x^2} dx$

18- $\int \frac{x^5-x^4-2x^3+4x^2-15x+5}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx$

الباب الحادى عشر

المعادلات التفاضلية

الباب الحادى عشر

المعادلات التفاضلية

تعتبر المعادلات التفاضلية من الأدوات الرياضية الهامة في فهم العديد من المسائل الفيزيائية والهندسية والإجتماعية وقد إمتدت اهميتها موخراً الي حقول العلوم الإقتصادية وظهر ما يسمي بالنمذجة الرياضية.

المعادلات التفاضلية هي عبارة عن معادلات جبرية تتكون حدودها من مشتقات لدالة لمتغير جبري قابلة للتفاضل، وهناك نوعان من المعادلات التفاضلية:

1) المعادلات التفاضلية العادية

2) المعادلات التفاضلية الجزئية

فالمعادلة التفاضلية العادية تحتوي علي متغير مستقل واحد أما المعادلة التفاضلية الجزئية تحتوي علي عدد من المتغيرات المستقلة (مثل درجة الحرارة $u(x,t)$ حيث تعتمد علي الموضع x والزمن t).

1.11) الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية وبعض طرق حلول المعادلات التفاضلية

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية العادية

$$P_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+P_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+P_{n-2}(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}+\cdots+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_0(x)y$$
$$=P(x) \quad (11.1)$$

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثاثية

كما أسلفنا فإن المعاللة التفاضلية الجزئية هي المعادلة التي تحوي مشتقاً جزئياً واحداً أو أكثر لتابع (دالة) مجهول يتعلق بمتغيرين مستقلين أو أكثر، فإذا كان التابع المجهول هو Z مثلاً وكانت المتغيرات المستقلة هي$x_1, x_2, \dots, x_n$ فالمعادلة التفاضلية الجزئية تأخذ الشكل الآتي:

$$f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) \qquad (11.2)$$

كل من المعادلات التفاضلية العادية والجزئية يمكن أن تصنف إلى خطية وغير خطية. وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين

1. إذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط أو ثوابت.
2. إذا كان المتغير التابع والمشتقات غير مرفوعة لأسس، أي كلها من الدرجة الأولى.

وتكون غير خطية فيما عدا ذلك.

ودرجة المعادلة التفاضلية تساوى رتبة أعلى تفاضل بالمعادلة.

- **الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الدرجة الأولى**

الشكل العام للمعادلة التفاضلية العادية ذات الدرجة الأولى يكتب على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = g(x) \qquad (11.3)$$

وتكتب أيضاً على الصورة

$$y' + P(x)y = g(x) \qquad (11.4)$$

و إذا كانت $g(x) = 0$ تسمى المعادلة بالمعادلة المتجانسة

$$y' + P(x)y = 0 \qquad (11.5)$$

ويكون حلها كالآتى

نقوم بفصل المتغيرات على الصوره

$$y' = -P(x)y$$

$$(\frac{y'}{y}) = -P(x)$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\, dx$$

$$y = Ce^{\int -P(x)dx} \qquad (11.6)$$

حيث C هو ثابت التكامل.

وتمثل المعادلة (6.11) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة ذات الرتبة الأولى.

نعرض الان حل عام للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة

$$y' + P(x)y = g(x)$$

للوصول للحل العام لهذه المعادلة نضرب طرفى المعادلة فى $\mu(x)$ فتصبح المعادلة السابقة على الصورة

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)g(x) \qquad (11.7)$$

بوضع

$$\mu'(x) = \mu(x)P(x)$$

فإن المعادلة (7.11) تؤول إلى

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)g(x)$$

$$\Rightarrow \int (\mu(x)y)' = \int \mu(x)g(x)$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x) + C$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)g(x) + C \qquad (11.8)$$

وهى الصورة العامة لحل المعادلة التفاضلية الغير متجانسة ذات الدرجة الأولى

تعريف: إذا أمكن وضع المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى على أحد الصور الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$
$$g(x)dx = h(y)dy$$
$$g(x)dx + h(y)dy = 0$$

فإنها تسمى معادلة تفاضلية قابلة للفصل أو ذات متغيرات قابلة للفصل

مثال:أى من المعادلات الآتية قابلة لفصل المتغيرات

أ) $\frac{dy}{dx} = y^2 x e^{3x+4y}$

ب) $\frac{dy}{dx} = y + \sin x$

الحل:

أ) المعادلة التفاضلية قابلة للفصل وذلك لأنه بالإمكان وضعها على الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

حيث أن

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 e^{4y})(xe^{3x})$$

حيث أن

$$h(y) = y^2 e^{4y}, \quad g(x) = xe^{3x}$$

ب) المعادلة التفاضلية غير قابلة للفصل لأنه لا توجد دالتان h(y),g(x) بحيث:

$$h(y).g(x) = y + \sin x$$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $ydx - xdy = xydx$

الحل:

أولاً: نقوم بفصل المتغيرات

$$ydx - xdy = xdy$$

بأخذ y عامل مشترك

$$y(1-x)dx = xdy$$

ثم القسمة على xy (أو الضرب بالمعامل $\frac{1}{xy}$)

$$\frac{1-x}{x}dx = \frac{dy}{y}$$

ثانياً: بتكامل طرفي المعادلة

$$\int (\frac{1}{x}-1)dx = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln x - x + \ln c = \ln y$$

$$\ln xc - x = \ln y$$

$$e^{\ln xc - x} = y$$

$$cxe^{-x} = y$$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $e^{x^3-y^2} + \frac{y}{x^2}\frac{dy}{dx} = 0$

الحل:

1- نفصل المتغيرات كالتالي

نعيد كتابتها للحصول على dy في حد و dx في الحد الآخر...

$$e^{x^3}e^{-y^2} + \frac{y}{x^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2e^{x^3}dx + ye^{y^2}dy = 0$$

2- بتكامل الطرفين نحصل على

$$\int x^2e^{x^3}dx + \int ye^{y^2}dy = c$$

$$\frac{1}{3}\int (3x^2)e^{x^3}dx + \frac{1}{2}\int (2y)e^{y^2}dy = c$$

$$\frac{1}{3}e^{x^3} + \frac{1}{2}e^{y^2} = c$$

وهو الحل العام المطلوب وبالإمكان تبسيطه

$$2e^{x^3} + 3e^{y^2} = c_1$$

حيث $c_1 = 6c$ ثابت اختياري.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضليةالتالية:

$$(x^3+x^2)ydx+x^2(y^3+2y)=0$$

الحل:

1- بقسمة طرفي المعادلة على yx^2 أو ضرب المعادلة في المعامل $\frac{1}{yx^2}$ فنحصل على

$$\frac{(x^3+x^2)}{x^2}dx+\frac{(y^3+2y)}{y}dy=0$$

وبالتبسيط أكثر

$$\left(\frac{x^3}{x^2}+1\right)dx+\left(\frac{y^3}{y}+\frac{2y}{y}\right)dx=0$$

$$(x+1)dx+(y^2+2)dy=0$$

2- بتكامل الطرفين نحصل على :

$$\int(x+1)dx+\int(y^2+2)dy=0$$

$$\int xdx+\int dx+\int y^2dy+\int 2dy=0$$

$$\frac{x^2}{2}+x+\frac{y^3}{3}+2y=c$$

وهو حل المعادلة التفاضلية المطلوب حيث c ثابت التكامل

مثال: حل المعادلة التفاضليةالتالية

$$xe^{-y}\sin xdx-ydy=0$$

الحل:

1- نفصل المتغيرات وذلك بضرب طرفي المعادلة بالمعامل e^y

$$x\sin xdx-ye^ydy=0$$

2- نكامل الطرفين

$$\int x \sin x dx - \int y e^{y} dy = c$$

$$-x \cos x + \int \cos x dx - y e^{y} + \int e^{y} dy = c$$

$$-x \cos x + \sin x - y e^{y} + e^{y} = c$$

$$-x \cos x + \sin x - e^{y}(y-1) = c$$

وهو حل المعادلة التفاضلية المطلوب .

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + 2x(1-y^{2})^{\frac{1}{2}} = 0$$

الحل:

1- نفصل المتغيرات

$$\frac{dy}{dx} + 2x\sqrt{1-y^{2}} = 0$$

بالقسمة على $\sqrt{1-y^{2}}$

2- بإجراء التكامل

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^{2}}} + \int 2x dx = c$$

$$\sin^{-1} y + x^{2} = c$$

والذى يمكن تبسيطه إلى الصورة

$$\sin^{-1} y = c - x^{2}$$

$$y = \sin(c - x^{2})$$

- **حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية**

المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية تكون على الصورة

$$ay'' + by' + cy = o \qquad (11.9)$$

حيث a, b, c معاملات ثابتة

لنفرض أن حل المعادلة يكون على الصورة

$$y(x) = e^{\mu x}$$

إذن يصبح الهدف هو تعين قيمة μ

$$y(x) = e^{\mu x}, \qquad y'(x) = \mu e^{\mu x}, \qquad y''(x) = \mu^2 e^{\mu x}$$

بالتعويض بالقيم السابقة فى المعادلة (9.11)

$$ay'' + by' + cy = o \;\; \Rightarrow e^{\mu x}(a\mu^2 + b\mu + c) = 0$$

المعادلة بداخل الأقواس فى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة تمثل معادلة جبرية من الدرجة الثانيـة

ويكون حلها على الصورة

$$(a\mu^2 + b\mu + c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \mu_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \qquad (11.10)$$

إذا كانت جذور هذه المعادلة الجبريـة أعداد حقيقيـة ففـى هذه الحالـة يكـون الحل للمعادلـة التفاضـلية علـى

الصورة

$$y = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x} \qquad (11.11)$$

أما إذا كانت جذور هذه المعادلة الجبرية أعداد مركبة على الصورة $(\lambda \pm \beta)$ ففى هذه الحالة يكون الحل

للمعادلة التفاضلية على الصورة

$$y = c_1 \cos \beta x e^{\lambda x} + c_2 \sin \beta x e^{\lambda x} \qquad (11.12)$$

2.11) المعادلة التفاضلية المتجانسة

قد تكون المعادلة التفاضلية ليست قابلة لفصل المتغيرات فيها ولكن قد تكون في الوقت نفسه بصورة معينة نستطيع تحويلها الى معادلة قابلة للفصل وذلك باستخدام بعض التحويلات باستخدام بعض التحويلات ومن هذه الصور المعادلة التفاضلية المتجانسة وهي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (11.13)$$

اذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة فاننا لغرض حلها نتبع الخطوات الاتية:

لنفرض أن

$$v = \frac{y}{x}, \qquad \text{أو} \quad y = vx$$

حيث v متغير جديد وهو دالة فى x

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

وبالتعويض عن قيم $\frac{y}{x}$ و $\frac{dy}{dx}$ فى المعادلة (11-13) نحصل على

$$x\frac{dv}{dx} + v + f(v) = 0 \qquad (11.14)$$

وهى معادلة قابلة لفصل المتغيرات

3.11) المعادلة التفاضلية التامة

المعادلة التفاضلية التامة هى معادلة تفاضلية إعتيادية وتكتب على الصوره

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (11.15)$$

بحيث أن

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

وهذا يعنى أن الإشتقاق الجزئى الثانى بالنسبة للمتغيرين (x,y) يجب أن يتساوى فى كلتا الحالتين. أى أن

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ويعطى الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة على الصورة

$$F(x,y) = C \qquad (11.16)$$

أى قيمة ثابتة.

و إذا لم تكن المعادلة تامة أى أن

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

فإن الحل لها يكون عن طريق مكاملة المعادلة بالنسبة لإحد المتغيرات كالاتى

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int P(x,y) + \varphi(y) \qquad (11.17)$$

ثم نشتقها بدلالة المتغير الأخر للحصول على المعامل $\varphi(y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N(x,y)$$

4.11) المعادلات التفاضلية الخطية

المعادلة التفاضلية الخطية تكتب على الصورة

$$A_o(x)\frac{d^n y}{dx^n}+A_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+A_n(x)y=F(x) \qquad (11.18)$$

وهذه المعادلة خطية سواء فى الجزء المعتمد على المتغير y أو المعتمد على مشتقة المتغير y.

وتكتب المعادلة التفاضلية الخطية ذات الدرجة الأولى على الشكل.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=g(x) \qquad (11.19)$$

ومن الملاحظ أن المعادلة الخطية ذات الدرجة الأولى تعتمد فقط على المتغير y.

5.11) المعادلات الخطية بمعاملات ثابتة

1. الحالة المتجانسة

تكتب المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة على الصورة

$$A_o\frac{d^n y}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_n y=0 \qquad (11.20)$$

لحل هذه المعادلات نجرب الحل $x=Ce^{Dx}$ حيث $e^{Dx}\neq 0$ و C ثابت إختيارى

وبالتعويض فى المعادلة السابقة

$$A_oD^ne^{Dx}+A_1D^{n-1}e^{Dx}+\cdots+A_{n-1}De^{Dx}+A_ne^{Dx}=0$$

$$(A_oD^n + A_1D^{n-1} + \cdots + A_{n-1}D + A_n)e^{Dx} = 0$$

وتسمى معادلة تفاضلية بمعاملات ثابته حيث $A_o, A_1, \dots A_{n-1}, A_n$ معاملات ثابته غاليا ما تكون حقيقة. وتمثل القيمة التى بين الأقواس كثيرة حدود من الدرجة n فى D. أى أننا يمكن كتابة المعادلة داخل القوس على الصوره

$$P(D) = A_oD^n + A_1D^{n-1} + \cdots + A_{n-1}D + A_n \qquad (11.21)$$

والتي تسمى المعادلة المساعدة

وحيث أن P(D) كثيرة حدود من الدرجة n فإن P(D) لها عدد n من الجذور .... D_1, D_2, D_3 و إذا كانت ... a_1, a_2, a_3 فإن هذه الجذورإما ان تكون حقيقية او ازواج من الأعداد المرآبة المتقارنة.

ويكون

$$y_i = C_ie^{D_ix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \qquad (11.22)$$

حل للمعادلة التفاضلية لثابت إختياري C_i ويكون

$$y(x) = C_1e^{D_1x} + C_2e^{D_2x} + \cdots + C_ne^{D_nx} \qquad (11.23)$$

أيضا حلا ويسمي الدالة المكملة وفي حالة المعادلات المتجانسة يكون الحل العام هو الدالة المكملة.

2. **الحالة غير المتجانسة**

لنعتبر المعادلة التفاضلية الغير متجانسه ذات المعاملات الثابتة والتى تكتب على الصوره

$$A_o\frac{d^ny}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_ny = f(D)y = F(x) \qquad (11.24)$$

ويكتب الحل العام لتلك المعادلة على الصورة

$$y = y_c + y_p \qquad (11.25)$$

حيث y_c يسمى الدالة المكملة و y_p يسمى بالحل الخاص

ولإيجاد الحل الخاص y_p

6.11) المعادلات التفاضلية الجزئية

المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية ذات الرتبة الثانية فى متغيريين x وy تكتب على الشكل

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + Fu = G \qquad (11.26)$$

حيث المعاملات A, B, C, D هى دوال فى المتغريين x وy وليس u. و إذا كانت المعاملات ثابته فإن الحل العام للمعادلة يعطى بفرض أن

$$u = e^{ax+by} \qquad (11.27)$$

حيث a و b ثوابت.

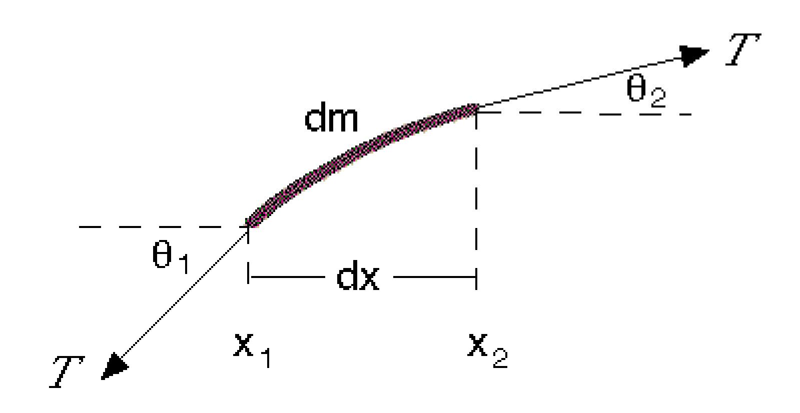
7.11) الصورة العامة للمعادة الموجة

كل الدوال الموجية $y(x,t)$ تمثل حلول لمعادلة تدعى: المعادلة الموجية الخطية. هذه المعادلة تعطي وصف كامل للحركة الموجية، ومنها يمكننا اشتقاق سرعة الموجة. بالإضافة إلى أنها تمثل الأساس للعديد من أشكال الحركة الموجية.

وللوصول إلى هذه المعادلة سنبدأ باستنتاجها من خلال موجة ناشئة على وتر مشدود. نفترض أن موجة متحركة تنتشر على طول وتر مشدود بقوة شد منتظمة T. سنركز اهتمامنا على عنصر صغير من الوتر طوله Δx كما في الشكل(1.11)، نهايتي العنصر تعمل زاويتين صغيرتين θ_1 و θ_2 مع محور x.

القوة الكلية المؤثرة على العنصر في الاتجاه العمودي (y) هي

$$\sum F_y = T \sin\theta_2 - T \sin\theta_1 = T(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



شكل (1.11) : عنصر من وتر واقع تحت تأثير قوة شد T.

ولأن الزوايا صغيرة يمكننا استخدام تقريب الزاوية الصغيرة $\sin\theta \approx \tan\theta$

، يمكننا التعبير عن القوة الكلية بالعلاقة:

$$\sum F_y \approx T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

وإذا كانت الإزاحة صغيرة جداً سنجد أن:

$$\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1$$

$$\sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2$$

$$\sum F_y \approx T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] \qquad (11.28)$$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في اتجاه y العمودي:

$$\sum F_{\mathrm{y}} = \mathrm{ma_y}$$

حيث m هي كتلة العنصر وتعطى بالعلاقة:

$$m = \mu\, \Delta x$$

حيث μ هي الكتلة لكل وحدة طولية. تصبح العلاقة الأخيرة كالآتي:

$$\sum F_y = \mu\, \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \qquad (11.30)$$

من العلاقتين 29.11 و 30.11 نجد أن:

$$\mu\, \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right]$$

$$\frac{\mu}{T}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = \frac{(\partial y/\partial x)_2 - (\partial y/\partial x)_1}{\Delta x} \qquad (11.31)$$

الطرف الأيمن من المعادلة 40 يمكن التعبير عنه بشكل مختلف إذا لاحظنا أن التفاضل الجزئي لأي دالة يعرف كما يلي:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (11.32)$$

بمقارنة المعادلتين 31.11 و 32.11 نحصل على:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (11.33)$$

هذه المعادلة تمثل المعادلة التفاضلية لحركة موجة تنشأ على وتر مشدود، ولتعميم هذه العلاقة نستخدم الحل العام للموجة التي تنشأ على وتر مشدود وهي العلاقة

$$y = A\sin(kx - \omega t) \qquad (11.34)$$

بأخذ التفاضل الجزئي الأول بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = kA\cos(kx - \omega t)$$

وأخذ التفاضل الجزئي الثاني بالنسبة لـ x :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx - \omega t) = -k^2 y$$

بأخذ التفاضل الجزئي الأول بالنسبة لـ t للعلاقة (34.11)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

وأخذ التفاضل الجزئي الثاني بالنسبة لـt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y$$

وبالتعويض في العلاقة (33.11) نحصل على:

$$-k^2 y = \frac{\mu}{T}\ (-\omega^2 y)$$

$$k^2 = \frac{\mu}{T}\ \omega^2$$

$$\frac{\omega^2}{\mathrm{k}^2} = \frac{T}{\mu}$$

$$\rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

$$\therefore v^2 = \frac{T}{\mu}$$

$$\rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}} \qquad (11.35)$$

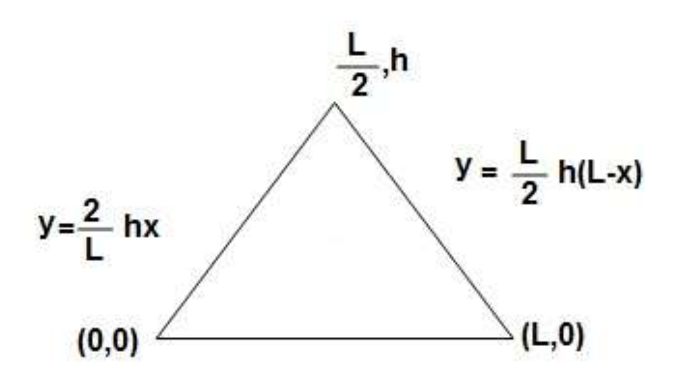
وبالتالي يمكننا كتابة الشكل العام للمعادلة التفاضلية للموجات كالآتي:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (11.36)$$

وبشكل عام يمكننا القول أن أي معادلة تفاضلية تحوي التفاضل الثاني لدالة ما بالنسبة للمكان يتناسب طردياً مع التفاضل الثاني لنفس الدالة بالنسبة للزمان فإن هذه الدالة حتماً تصف معادلة حركة موجية ويمثل ثابت التناسب في المعادلة التفاضلية $\frac{1}{v^2}$ حيث v هي سرعة انتشار الموجة.

ولحل المعادلة العامة للموجه سنأخذ فى الإعتبار الشروط الإبتدائية ثم نستخدم طريقة فصل المتغيرات على النحو التالى .

الشروط الإبتدائية فى تلك الحالة يمكن أن توصف على أنا الإزاحه الإبتدائية فى مركز الخيط وعلى هذا فإن الشروط الإبتدائية يمكن التعبير عنها رياضيا كالاتى



شكل (2.11) : *الإزاحة الإبتدائية فى مركز خيط*

$$y = (0, t) = 0$$

نقاط محدده عند نهاية الخيط $\quad y = (L, t) = 0$

عند ازمنه مختلفه $\quad y = \left(\frac{L}{2}, t\right) = h$

شكل إبتدائى من الخيط

$$\begin{cases} y = \left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{2}{L}hx & 0 < x < \frac{L}{2} \\ \quad = \frac{2}{L}h[L - x] & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

عند زمن صفر

$$\frac{\partial}{\partial t}y(x,0) = 0$$

لنفرض أن

$$\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$$

إذن معادلة الموجه تأخذ الشكل

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (11.37)$$

ولنفرض أن الحل العام لمعادلة الموجه يمكن التعبير عنه بدلالة الدالتين X, T ويكتب على الصوره

$$y(x,t) = X(x)T(t) \qquad (11.38)$$

وبإجراء التفاضل للمعادلة السابقة على النحو التالى

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = XT''$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = TX''$$

إذن يمكننا إعادة كتابة معادلة الموجه لتأخذ الشكل

$$XT'' = \alpha^2 X'' T$$

وهى معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات ويمكننا إعادة كتابتها على الصوره

$$XT'' - \alpha^2 X'' T = 0 \qquad (11.39)$$

بقسمة طرفى المعادلة على T ومره أخرى X يمكننا الحصول على المعادلتين

$$X\frac{T''}{T} - \alpha^2 X'' = 0, \qquad T'' - \alpha^2 \frac{X''}{X} T = 0$$

بوضع

$$\frac{T''}{T} = -\lambda^2 \qquad \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$T''(t) + \alpha^2\lambda^2 T = 0 \qquad X''(t) + \alpha^2\lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \alpha^2\lambda^2 T = 0 \qquad \frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2\lambda^2 X = 0$$

دالة فى t فقط   دالة فى x فقط

ويعطى الحل العام لكل منهما على الصوره

$$T = C_1 e^{\alpha\lambda i t} + C_2 e^{-\alpha\lambda i t} \qquad X = C_1 e^{\alpha\lambda i x} + C_2 e^{-\alpha\lambda i x} \qquad (11.40)$$

أو

$$T = (C_1 + C_2)\cos\alpha\lambda t + i(C_1 - C_2)\sin\alpha\lambda t$$

$$X = (C_1 + C_2)\cos\alpha\lambda x + i(C_1 - C_2)\sin\alpha\lambda x \qquad (11.41)$$

الباب الثانى عشر

المتسلسلات اللانـهائية

الباب الثانى عشر

المتسلسلات اللانـهائيـة

1.12) المتتالية

هي دالة مجالها مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة ونرمز لها بـالرمز $a(n)$ أو $\{a_n\}$ ونرمز لحدها النوني بالرمز a_n. فى المتتالية، لكل قيم (n) توجد دالة $f(n)$ تعطى القيمـة لعديـدة الحـدود (n_{th}) من المتتالية ويمكن كتابتها على الصورة

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (12.1)$$

وفى حالة إذا كان للمتتالية نهاية L وذلك عندما تؤول a إلى مالانهاية فإن

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (12.2)$$

والنهايات فى االمتتاليات يكون لها نفس خصائص النهايات فى صورتها العامة وذلك بمعنـى أنـه إذا كـان لـدينا المتتابعتان $f(n)$ و $g(n)$ على الصورة

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = L \qquad \lim_{n \to \infty} g(n) = M$$

نجد أن

$$\lim_{n \to \infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$$

$$\lim_{n \to \infty} (f(n)g(n)) = LM$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)=\frac{L}{M}$$

اذا كان

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=L$$

فنقول ان المتتالية متقاربة للعدد L وفيما عدا ذلك فان المتتابعة متباعدة.

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي يكون فيها الفرق بين كل حدين متتالين مقدرا ثابتا يسمى الفرق الثابت بين أي حد والحد السابق له مباشرة أساس المتتالية. وتكتب الصيغة الرياضية لتلك المتتالية كالأتى

$$a, a+d, a+2d, a+3d \dots$$

$$f(n)=a+(n-1)d \qquad (12.3)$$

المتتالية الهندسية هي المتتالية التي يكون فيها النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة نسبة ثابتة .

النسبة الثابتة تسمى أساس المتتالية الهندسية . وتكتب على الصورة

$$a, ar, ar^2, ar^2 \dots ar^{n-1} \dots$$

$$f(n)=ar^{n-1} \qquad (12.4)$$

2.12) المتسلسلات

إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية وكان $S_n=a_{1+}a_2+a_3+\cdots+a_n$ فإن المتتالية $\{S_n\}$ تسمى متسلسلة لا نهائية وسنستعيض عن إستخدام الرمز $\{S_n\}$ بالرمز

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

فإن المتسلسلة متقاربة والمقدار S يسمى بمجموع المتسلسلة وفيما عدا ذلك فإن المتسلسلة متباعدة

المتسلسلة التي بالصيغة $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$ تسمى بالمتسلسلة الهندسية ويكتب مجموعة تلك المتسلسلة على الصورة

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (12.5)$$

3.12) **إختبار دالامبير (إحتبار النسبية)**

إذا كان

$$\sum_{n-1}^{\infty} u_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots |a_n|$$

سلسلة ذات حدود موجبة لا نهائية. ولندرس النهاية لتلك المتسلسلة

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

1) إذا كان $l < 1$ فالسلسلة متقاربة

2) إذا كان $l > 1$ فالسلسلة متباعدة

3) إذا كان $l=1$ فلدينا حالة شك في معرفة تقارب أو تباعد السلسلة

4.12) متسلسلة القوى

هى تلك المتسلسلة التى لا تحتوى على قيم ثابتة وتكتب على الصورة

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+\cdots$$

$$+a_n(x-c)^n+\cdots$$

حيث المتغير x هو متغير القيمة (أى الذى يعطى القيمة) و c عباره عن عدد حقيقى وهو يمثل مركز المتسلسلة وفى العديد من الحالات يكون المركز c مساويا للصفر ومن ثم فإن المتسلسلة تأخذ الشكل

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

ويمكن إجراء عملتى التفاضل والتكامل لمتسلسلة القوى كما يلى

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_nx^n)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$\int_0^{\infty}f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{x}(a_nx^n)dx$$

$$=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\frac{1}{1+n}a_nx^{n-1}+\cdots$$

الباب الثالث عشر

تحويلات لابلاس

الباب الثالث عشر

تحويلات لابلاس

1.13) تحويلات لابلاس

يعتبر تحويل لابلاس أحد العمليات التى تجرى على الدوال الرياضية لتحويلها من مجال إلى آخر وتحويل لابلاس مفيد في تحليل النظم الخطية، كما يستخدم لحل المعادلات التفاضلية لأنه يحولها إلى معادلات جبرية

لنفرض أن هناك دالة $f(x)$ معرفة في الفراغ $S \geq 0$ فإذا فرضنا هذه الدالة في النواة e^{-sx} وهي دالة تابعة للمتغير x والوسيط s ثم التكامل على الناتج بالنسبة لـx من القيمة 0 إلى ∞ وكان هذا التكامل متقارب فإن ناتج هذا التكامل يسمى محول لابلاس للدالة $f(x)$ وتسمى s بمعامل لابلاس حيث $s > 0$ ويرمز للتحويل لابلاس كالاتى

$$L\big(f(t)\big) \quad \text{أو} \quad F(s) \qquad (13.1)$$

ويكتب تحويل لابلاس على الصورة

$$L\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dt = F(s) \qquad (13.2)$$

ويقال أن تحويل لابلاس لدالة ما متواجد إذا كان التكامل متقارب أما إذا كان التكامل متباعداً فإننا نقول أن تحويل لابلاس غير معروف.

ومؤثر تحويل لابلاس هو مؤثر خطي أي انه إذا كانت لدينا الدالتين $f(t), g(t)$ وكان تحويل لابلاس لتلكم الدوال هو $L\big(f(x)\big), \ L\big(g(x)\big)$ على الترتيب فإنه لأي عددان a, b ينتميان لحقل الأعداد F فإن

$$L(af(x)+bg(x)) = aL(f(x)) + bL(g(x)) \qquad (13.3)$$

وتحويل لابلاس العكسى يعطى على الصوره

$$L^{-1}(F(s)) = f(t) \qquad (13.4)$$

والجدول التالى يوضح أهم تحويلات لابلاس

تحويل لابلاس F(s)	الإشارة f(t)	اسم الإشارة f(t)	م
1	δ(t)	الوحدة النبضية	1
$\frac{K}{s}$	K	الوحدة الدرجية (K ثابت)	2
$\frac{K}{s^2}$	$K\,t$	الوحدة التصاعدية	3
$\frac{K}{s+a}$	$K.e^{-at}$	الإشارة الأسية بثابت a>0	4
$\frac{K}{\tau.s+1}$	$K.e^{-\frac{t}{\tau}}$	الإشارة الأسية بثابت زمن τ>0	5
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	الاستجابة الدرجية للنظام ذي المرتبة الأولى بثابت a>0	6
$\frac{K}{s(\tau.s+1)}$	$K(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$	الاستجابة الدرجية للنظام ذي المرتبة الأولى بثابت زمن τ>0	7
$\frac{K\omega}{s^2+\omega^2}$	$K.\sin(\omega t)$	الإشارة الجيبية sin ، تردد زاوي ω	8
$\frac{Ks}{s^2+\omega^2}$	$K.\cos(\omega t)$	الإشارة الجيبية cos ، تردد زاوي ω	9
$\frac{K\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$K.e^{-at}.\sin\omega t$	الاستجابة الأسية الجيبية sin	10
$\frac{K(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$	$K.e^{-at}.\cos\omega t$	الاستجابة الأسية الجيبية cos	11
$\frac{K}{(s+a)^2}$	$K.t.e^{-at}$	الاستجابة الخطية الأسية	12

2.13) تحويلات لابلاس للدوال المشتقة

ذكرنا سابقاً فى المعادلة (4.12) الصورة العامة لتحويل لابلاس ولإيجاد تحويل لابلاس للمشتقة الأولى $f'(x)$ والتى تكتب على الصورة

$$L\big(f'(x)\big) = \int_0^\infty e^{-sx} f'(t)dt \qquad (13.5)$$

ولايجاد محول لابلاس لتلك المشتقة فإننا نستخدم قاعدة التكامل بالتجزئ كالآتى

لنفرض أن

$$u = e^{-st}, \qquad dv = f(t)dt$$

$$du = -se^{-sx}, \qquad v = f(t)$$

ومن ثم نحصل على

$$L\big(f'(t)\big) = [e^{-sx} f(t)]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= [e^{-sx} f(t)]_0^\infty + sL\big(f(t)\big)$$

$$= -f(0) + sL\big(f(t)\big)$$

$$= sF(s) - f(0) \qquad (13.6)$$

حيث أن

$$L\big(f(t)\big) = F(s)$$

وبالمثل بالنسبة للمشتقة الثانية

$$L\big(f''(t)\big) = s^2 L\big(f(t)\big) - sf(0) - f'(0) \qquad (13.7)$$

ويممكن بناء على ما سبق كتابة الصورة العامة للمشتقة فى تحويلات لابلاس على الصورة

$$L\big(f^n(t)\big) = S^n L\big(f(t)\big) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{-1}(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

$$= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^k(0) \qquad (13.8)$$

بتفاضل طرفى معادلة تحويل لابلاس (المعادلة 20) بالنسبة إلى s نحصل على

$$\frac{d}{ds}F(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st}f(t)dt)$$

$$= \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt = L(-tf(t)dt) = -L\big(tf(t)\big) = -tF(s) \qquad (13.9)$$

حيث

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = L\big(f(t)\big) = F(s)$$

ويمكننا وضع الصورة العامة لتفاضل تحويل لابلاس كالاتى

$$L\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n F^n(s) \qquad (13.10)$$

3.13) دالة الخطوة

لنفرض الدلة $U(t)$ حيث

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

أو

$$U(t-C) = \begin{cases} 0 & t < C \\ 1 & t \geq C \end{cases}$$

ويحسب تحويل لابلاس لتلك الدالة كالآتي

$$L\left(U(t-C)\right) = \int_0^\infty e^{-st} U(t-c)dt$$

$$= \int_0^C e^{-st}(0)dt + \int_C^\infty e^{-st}(t)dt$$

إذن

$$L\left(U(t-C)\right) = \frac{e^{-st}}{s} \qquad (13.11)$$

4.13) تحويلات لابلاس لحل المعادلات التفاضلية

تعتبر تحويلات لابلاس أحد أهم الطرق المستخدمة فى حل المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة. وتعتمد هذه الطريقة على بعض التحويلات الخاصة التى يمكن الحصول عليه من جدول تحويلات لابلاس.

لنعتبر الأن حركة البندول. ومن المعلوم أن معادلة الحركة للبندول تعطى على الصورة

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad (12.12)$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ هى الحركة الزاوية للبندول

وبتطبيق الشروط الإبتدائية للحركة نجد أن

عند $t = 0$ فإن $\frac{d\theta}{dt} = 0$ و $\theta(0) = A$

حيث A يمثل سعة الإهتزازة

ويمكننا حل المعادلة التفاضلية للبندول (معادلة 12.12) عن طريق تحويلات لابلاس كالآتى

بأخذ تحويل لابلاس لطرفى المعادلة (12.12)

$$L\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + L(\omega^2\theta) = 0 \qquad (13.13)$$

وبإستخدام الصورة العامة للمشتقة الثانية والصورة العامة لتحويل لابلاس (2.13) فإن المعادلة (13.12) تؤول إلى الشكل

$$s^2L\big(\theta(t)\big) - s\theta(0) - \frac{d\theta}{dt} + \omega^2L\big(\theta(t)\big) = 0$$

$$s^2L\big(\theta(t)\big) - sA + \omega^2L\big(\theta(t)\big) = 0$$

وهذه معادلة جبرية ويكون حلها بالنسبة $\theta(t)$ على الصورة

$$(s^2 - \omega^2)L\big(\theta(t)\big) = sA$$

$$L\big(\theta(t)\big) = A\left(\frac{s}{s^2 - \omega^2}\right)$$

$$\theta(t) = AL^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - \omega^2}\right) \qquad (13.14)$$

وحيث أن تحويل لابلاس العكسى للدالة

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - \omega^2}\right) = \cosh \omega t$$

وبالتالى فإن المعادلة (14.13) تؤول إلى

$$\theta(t) = A\cosh \omega t \qquad (13.15)$$

وهى تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية بإستخدام تحويلات لابلاس

الباب الرابع عشر

طرق عددية

الباب الرابع عشر

طرق عددية

1.13) طريقة نيوتن

هناك العديد من الطرق لإيجاد جذور كثيرات الحدود منها ما يحل عن طريق القوانين العامة مباشرة مثل كثيرة الحدود ذات الدرجة الأولى (أى الخط المستقيم) فمثلاً فى تلك الحالة يكون علينا إيجاد المتغير x عندما يكون المتغير $y = 0$.

$$y = ax + b$$

$$x = -\frac{a}{b} \; , \qquad\qquad at\; y = 0$$

ومن ناحية أخر ففى حالة كثيرة الحدود ذات الدرجة الثانية فإننا نستخدم القانون العام لإيجاد الجذور التربعية

$$y = ax^2 + bx + c$$

ويكون حلها على الصورة

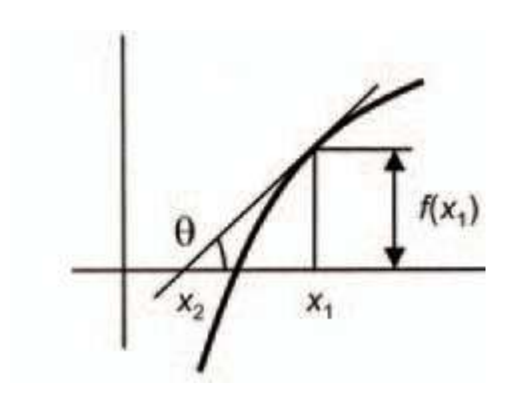
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويمكن إستخدام مثل تلك الطرق لحل كثيرات الحدود حتى الدرجة الرابعة ولكن فى حالة كثيرات الحدود من الدرجات العليا (الدرجة الخامسة فما فوق) فإننا لا يمكن إيجاد قانو جبرى لمعرفة جذورها سواء أكانت الجذور الحقيقية أم التخيلية ولذلك فإننا نلجأ لإستخدام الطرق العددية لحل مثل تلك المعادلات وإيجاد جذورها.

ومن هذا الطرق المستخدم فى حلول كثيرات الحدود ذات الدرجات العالية طريقة نيوتن والتى تعتمد على

إختيار قيمة فصوى للمتغير x_2 ثم رسم التمثيل البياني لدالة الظل ومن ثم يمكن الحصول على المتغير x_2

(إنظر الشكل)



من الشكل المقابل

$$\tan\theta = \frac{f(x_{1)}}{x_1 - x_2} = f'(x)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x)}{f'(x_1)}$$

وهى أول الطرق التقريبية لإيجاد الجذور لكثيرات الحدود بإستخدام طريقة نيوتن وبتكرار العملية السابقة لعدد (n) من المرات للحصول على كل الجذور الممكنة. ويمكن كتابة الصورة العامة لتقريب نيوتن لحل كثيرات الحدود على الصورة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$

2.13) طريقة الإستيفاء الداخلى

يمكن استخدام قانون الاستيفاء الداخلي الأمامي لغريغوري - نيوتن لتمثيل كثير حدود من المرتبة من الدرجة n لمجموعة من n+1 من النقاط بيانيا ولكن تلك الطريقة تكون قاصرة الإستخدام فى حالة الأعداد الكبيرة من التقاط وتعتمد تلك الطريقة على إيجاد جدول الفروق كالأتى . فى حالة إذا ما كانت القيم متباعده بالتساوى فإن جدول الفروق يكون

x	$f(x)$	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
x_0	x_0		
		$\Delta^1 f_0$	
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f_0$
		$\Delta^1 f_1$	
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f_1$
		$\Delta^1 f_2$	
x_3	$f(x_3)$		
		1st order differences	2nd order differences

بعد أن أنشأنا جدول الفروق الأمامية، يمكن استخدام قانون الاستيفاء الداخلي الأمامي لغريغوري نيوتن لتمثيل كثير حدود من المرتبة n لمجموعة من النقاط بيانياً والذى يعطى بالشكل

$$P_n(x) = f_0 + s\Delta^1 f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots$$

حيث أن

$$s = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

وهي معادلة كثير حدود بالنسبة لـs

وإذا كانت القيم المعطاه مناسبة تماماً لكثيرة الحدود من الدرجة n فإن الإختلاف من الدرجة n $(\Delta^n y)$ تكون متساوية ويكون الإختلاف فى العمود التالى $(\Delta^{n+1} y)$ عبارة عن المتتالية الصفرية.

أما فى حالة إذا ما كان التباعد غير متساوى فإن جدول الإختلاف يعطى على الصوره

x	$f(x)$	$\Delta^1 \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$	$\Delta^2 f(x)$
x_0	$f(x_0)$		
		$\Delta^1 f(x_1, x_0)$	
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_2, x_1, x_0)$
		$\Delta^1 (x_2, x_1)$	
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_3, x_2, x_1)$
		$\Delta^1 (x_3, x_2)$	
x_3	$f(x_3)$		

وتكون كثيرة الحدود فى تلك الحالة على الصورة

$$P_n(x) = f[x_0] + (x_1 - x_0) f[x_1, x_0] + (x_1 - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_3, x_2, x_1, x_0] + \cdots$$

4.13) طريقة المربعات الصغرى الخطية

أ) المربعات الصغرى الخطية

في بعض الأحيان نتحصل علي معلومات ميدانياً أو معملياً في مختلف ا لمجالات العلمية وتكون هنالك حاجة للتعبير عن هذه البيانات في شكل معادلة من أجل درستها وتحليلها واستخلاص نتائج منها، طريقة المربعات الصغرى أحد هذه الطرق التي تستخدم لإيجاد أفضل دالة تناسب البيانات المعطي و لإستخدام طريقة المربعات الصغرى لابد من تحديد درجة الدالة المتعددة الحدود

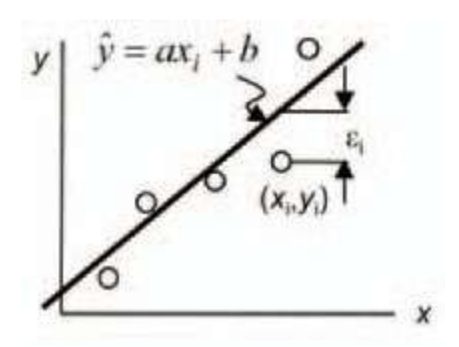
$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

ثم يتم حساب الفرق بين قيمة Y التي تمثل البيانات والقيمة التقريبية y التي تعطيها هذه المعادلة ويسمي هذا الفرق بحد الخطأ أي أن

$$d = y - Y = y_k - f(x_k)$$

نوضح في هذا الجزي كيفية إيجاد أفضل دالة بطريقة المربعات الصغري للدوال الخطية ثم الدوال غير الخطية.

الدوال الخطية في المربعات الصغري



إذا كانت العلاقة بين قيم (X,Y) المعطاه خطية وإذا عرفنا الدالة

$$Y_i = a + b\,x_i$$

فالبنسبة الي فروق المحور الصادي بين القيم المعطاة y_i والقيمة التقريبية Y_i

$$d_i = y_i - Y_i$$

وبتعويض قيمة من معادلة الخط المستقيم ينتج أن

حيث d هو الفرق علي المحور الصادي، سيكون هنالك فرق لكل نقطة من النقاط المعطاة أي

$$Q = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + ... + d_n^2$$

وبجمع هذه الفروق نحصل علي

$$Q = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y - (a + b x_i))^2$$

$$= \sum (y_i^2 - 2 y_i (a + b x_i) + (a + bx_i)^2)$$

$$= \sum (Y_i^2 - 2 y_i a + 2 y_i b x_i + a^2 + 2ab x_i + b^2 x_i^2)$$

وللحصول علي أصغر قيمة لمجموع المربعات نفضل Q ونساويه بالصفر

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - a - b x_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \sum 2(Y_i - a - b x_i)(- x_i) = 0$$

بقسمة كل من المعادلتين علي (2) وفك المجموع نحصل علي معادلتين إعتيادتين

$$b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$b\sum_{i=1}^{n} x_i + an = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

وللحصول علي معادلة الخط المستقيم تكون قيم الـ a,b كالأتي

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$
$$a = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

حيث تمثل a تقاطع الخط المستقيم مع المحور الصادي وتمثل b مقدار إنحدار الخط المستقيم

ب) الأسية

المعادلات العادية

$$\sum \log y = N \log a + (\log b) \sum x$$
$$\sum x \log y = (\log a) \sum x + (\log b) \sum x^2$$

ج) دالة القوى

المعادلات العادية

$$\sum \log y = N \log a + b \sum \log x$$

$$\sum(\log x \log y) = (\log a) \sum \log x + b \sum \log^2 x$$

5.13) طريقة المربعات الصغرى الغيرالخطية

وهناك أيضاً حالة أخرى من طريقة المربعات الصغرى وذلك فى حالة إذا ما كانت القيم فى صورة غير خطية . لنفرض أن لدينا كثيرة حدود من الدرجة n

$$\tilde{y} = a_1 x_i + a_2 {x_i}^2 + a_3 {x_i}^3 + \cdots + a_n {x_i}^n$$

$$\varepsilon_i = y_i - \tilde{y}_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_i {x_i}^2 - a_3 {x_i}^3 - \cdots a_n {x_i}^n)^2$$

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - a_0 - a_i {x_i}^2 - a_3 {x_i}^3 - \cdots a_n {x_i}^n)(-{x_i}^0)$$

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - a_0 - a_i {x_i}^2 - a_3 {x_i}^3 - \cdots a_n {x_i}^n)(-{x_i}^0)$$

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - a_0 - a_i {x_i}^2 - a_3 {x_i}^3 - \cdots a_n {x_i}^n)(-{x_i}^1)$$

$$\vdots$$

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial a_n} = \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - a_0 - a_i {x_i}^2 - a_3 {x_i}^3 - \cdots a_n {x_i}^n)(-{x_i}^n)$$

حيث تمثل N الأرقام الزوجية للقيم $(N > n + 1)$

ويمكننا كتابة المعادلة السابقة فى صورة مصفوفة

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 & . & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & . & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & . & \sum x_i^{n+2} \\ . & . & . & & . \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \vdots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ . \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

ويمكن حل تلك المصفوفة بإستخدام الطرق المعهوده للحل المصفوفات

6.13) الأخطاء الناشئة داخل المعادلة

لنعتبر $y = f(x)$ قياسة مفرده عند x_i فإن

$$y_i = f(x_i) = f(x_i - \bar{x} + \bar{x})$$

$$= f(\bar{x}) + (x_i - \bar{x})\frac{dy}{dx} + \frac{(x_i - x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

والمعادلة السابقة على صورة متسلسلة تايلور

ولنعتبر الآن كل القيم الممكنه ل $\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_1}{N}$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum f(\bar{x}) + (x_i - \bar{x})\frac{dy}{dx} + \frac{(x_i - x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$= f(\bar{x}) + \frac{dy}{dx}\sum\frac{x_i - \bar{x}}{N} + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \sum\frac{(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$\frac{dy}{dx}\sum\frac{x_i - \bar{x}}{N} = 0, \quad \sum\frac{(x_i - \bar{x})^2}{N} = \sigma^2(x)$$

$$\bar{y} = f(\bar{x}) + \frac{1}{2}\sum\frac{d^2y}{dx^2}\sigma^2(x)$$

ملحوظة

$$\int\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\sigma^2(y) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\sigma^2(x)$$

إذا كان

$$z = f(x, y)$$

إذن

$$\sigma^2(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}\sigma^2(x) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}\sigma^2(y)$$

$$\sigma^2(z) = \sum_{i}^{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\sigma^2(x_i)$$

الباب الخامس عشر

نظرية الإحتمالات

الباب الخامس عشر

نظرية الإحتمالات

1.15) الوسط الحسابى، الوسيط، المنوال، المدى

القيمة المتوسطة أو الوسط الحسابى لمجموعة من القيم هو عبارة عن مجموع تلك القيم مقسوماً على عددها.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

إذا كان لدينا العديد من النتائج فيمكننا حساب القيمة المتوسطة لها إذا كان عدد كل عنصر داخل تلك البيانات معروف

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3 + \cdots + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k}$$

الوسيط هو الرقم الذي يفصل النصف الأعلى من القيم عن النصف الأقل بحيث يتساوى على طرفه عدد القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً فإذا كان عدد هذه القيم فردياً فالوسيط هو الرقم النصفي الذي يقسم هذه القيم أما إذا كان عدد القيم زوجياً فالوسيط هو الوسط الحسابي لمجموع الرقمين الوسيطيين

المنوال هو القيمة التى يحدث بها أكثر تكرار فى مجموعة البيانات المعطاه فإذ فرضنا أن لدينا الأعداد

$$1,5,2,1,4,7$$

المنوال في هذه الحالة =1 لأنه الأكثر تكرارا

ولو فرضنا أن لدينا جدول يبين فئات وأسفلها التكرارات، نرى أي الفئات أكثر تكرارا ولنفرض أنها الفئة من(2-4)ونحسب مركز الفئة

$$\frac{2+4}{2}=3$$

إذن المدى فى تلك الحالة هو 4

المدى هو الفرق بين أكبر قيمة و أقل قيمة فى مجموعة البيانات المعطاة فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا مجموعة البيانات الآتية

$$23{,}32 \text{ ، } 34 \text{ ، } 33 \text{ ، } 12 \text{ ، } 40,$$

فإن المدى لها هو

$$40-12=28$$

ومن الواضح أن المدى يهتم فقط بتلك القيمتين ولا يتأثر بالقيم الأخرى ويعتبر من أبسط مقاييس التشتت ولا يعتبر مقياس مهم للتشتت، وكلما صغرت قيمة المدى قل تشتت المجموعة فمجموعة القيم

$$17 \text{ ، } 24 \text{ ، } 13 \text{ ، } 33 \text{ ، } 22$$

المدى لها

$$33 - 13 = 20$$

أقل تشتت من المجموعة السابقة التي مداها 28 ويصح القول بأن المجموعة الأولى (المدى 28) أكثر تشتت من المجموعة الثانية المدى 20

2.15) التباديل والتوافيق

نرمز لمضروب العدد الصحيح الغير سالب n بالرمز $n!$ ونعرفه كما يلي

$$0! = 1$$

و إذا كان $n > 1$ فإن مضروب n يعرف بالقاعدة

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots .(3)(2)(1)$$

ر- التبدايل

لتكن A مجموعة بها n من العناصر. نعرف تبديل المجموعة A بأنه تنظيم لعناصر المجموعة في وضع مرتب. إذا أردنا ترتيب k من عناصر المجموعة فنسمي ذلك تبديلا بطول k من المجموعة A. لاحظ أن تباديل المجموعة A هي التباديل بطول n من A.

عدد التباديل بطول k من مجموعة بها n عنصرا يساوي

$$P(n.k) = n(n-1)(n-2)(k)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

عدد تباديل المجموعة المؤلفة من n عنصر يساوي

$$P(n.n) = n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1) = n!$$

ز- التوافيق

لتكن A مجموعة بها n عنصرا. كل مجموعة جزئية بها k عنصرا من A تسمى توفيقا بسعة k من A. يستخدم الرمز $C(n,k)$ أو $\binom{n}{k}$ للدلالة على عدد التوافيق بسعة k من مجموعة بها n عنصرا

عدد التوافيق بسعة k من مجموعة بها n عنصرا يساوي

$$C(n,k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

3.15) الإحتمالات والتوقع

كثيراً ما نستخدم مفهوم الاحتمال في حياتنا اليومية كأن نقول ان احتمال نجاح الطالب في مادة الرياضيات 50 % أو 70 % ويتراوح الإحتمال بين الصفر والواحد.

إذاً كلما كان الحدث أكثر وقوع أكان الاحتمال أقرب إلى الواحد ، وكلما كان الحدث أقل وقوعاً كان الإحتمال أقرب إلى الصفر.

لنرمز إلى إحتمال وقوع الحدث (E) بالرمز P(E) وإحتمال عدم حدوثه بالرمز q(E) حيث

$$q(E) = 1 - P(E)$$

وتستخدم كلمة نجاح للإشارة إلى وقوع الحدث وكلمة فشل لعدم وقوعة وللوصول إلى تعريف دقيق للإحتمال، لا بد من تعريف التجربة والحدث، وتعرف التجربة بأنها عملية تجرى تحت ظروف معينة ولا يمكن التنبؤ بنتيجتها بشكل أكيد وللتجربة نتائج محتملة أما الحدث فهو مجموعة النتائج التى لها خصائص محددة في المجموعة الكلية للنتائج Ω.

إذا رمزنا إلى عدد النتائج المحتملة بـ $N(\Omega)$ وعدد النتائج (الحالات) المواتية (التى نحصل عليها نتيجة الحدث E) بـ n(E) يكون إحتمال حدوث الحدث E ولنرمز له بالرمز P مساوياً لعدد الحالات المواتية مقسوماً على عدد الحالات الممكنة وذلك عندما يكون جميع النتائج الممكنة فى Ω الفرصة نفسها فى الحدوث أى أن

$$P = \frac{n(E)}{N(\Omega)} = \frac{n}{N}$$

5- التوقع

إذا كانت x متغيرة عشوائية متقطعة وكانت $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ قيمها الممكنة فإن توقعها الرياضى يكتب كما يلى

$$E(x) = x1 . P(X = x1) + x2 . P(X = x2) + \dots\dots + xn . P(X = xn) = \Sigma \mathrm{xi} . \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{xi})$$

أما اذا كانت المتغيرة العشوائية مستمرة، دالة احتمالها هي $f(x)$ فان توقعها الرياضي يعطى

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

4.16) التوزيعات الإحتمالية

عند دراستنا للتوزيعات الاحتمالية ، نميز بين نوعين من هذه التوزيعات

س- التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتقطعة.

ش- التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة.

ويعد توزيع ذى الحدين من أهم التوزيعات الإحتمالية للتغيرات المتقطعة كما يعتبر التوزيع الطبيعى وتوزيع ستودينت من أهم التوزيعات الإحتمالية المتصلة.

- **توذيع ذى الحدين**

إن توزيع ذات الحدين أو التوزيع ذا الحدين من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المهمة شائعة الاستخدام في كثير من التطبيقات .عندما نجرى تجربة n مرة نستخدم متغيراً عشوائياً X يمثل العدد الكلى لمرات وقوع الحدث تحت الشروط الأتيه

1- عدد المحاولات = n

2- المحاولات مستقلة (نتيجة أي محاولة لا يؤثر ولا يتأثر بنتائج المحاولات الأخرى)

3- احتمال النجاح P=P(s) ثابت لجميع المحاولات

إن مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائى X هى X(S)={0,1, … n}

دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير العشوائى X هى

$$f(x) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} P^X q^{n-X}$$

حيث:

(P) احتمال حدوث الحدث في المحاولة الواحدة للتجربة .

(q) احتمال عدم حدوثه حيث $p + q = 1$

(n) عدد مرات تكرار التجربة .

(n!) وهى عبارة عن حاصل ضرب كل الأعداد الصحيحة من 1 إلى n

وعند استخدام توزيع ذي الحدين ، فان الوسط الحسابي لمتغير ذي الحدين يساوي

$$\mu = np$$

وتباينة

$$\sigma^2 = npq$$

- **التوزيع الطبيعى**

يعد التوزيع الطبيعى أو المعتاد أحد الأمثلة المهم للتوزيع الإحتمالى للمتغير التصل ويستخدم هذا التوزيع كثيراً فى مجال العينات ويتصفهذا التوزيع بعدة خصائص

- المتغير العشوائى المتصل X يأخذ قيماً من $-\infty$ إلى ∞

- إن شكل منحنى التوزيع الطبيعى يشبة الجرس
- إن قمة المنحنى تقع عند متوسط المجتمع μ و المنحنى متماثل حول μ إذا كان كل طرف هو صورة مطابقة للطرف الآخر
- يعتمد التوزيع الطبيعى على كلا من متوسط المجتمع μ وتباين المجتمع σ^2 لذا يشار إلى هذا التوزيع بالرمز $N(\mu, \sigma^2)$
- إن مركز التوزيع يعتمد على μ وشكلة يعتمد على الإنحراف المعيارى σ

إن دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الطبيعى تكتب على الصورة

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^2 / \sigma^2}$$

وهناك ما يسمى بالتوزيع الطبيعى المعيارى وهو توزيع طبيعى متوسطه $\mu = 0$ وتباينة (1) ويرمز له بالرمز $N(1,0)$ ويستخدم الرمز Z للإشارة إلى المتغير العشوائى الذى له توزيع طبيعى ويتم حساب إحتمالات أى متغير له توزيع طبيعى من إحتمالات منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى وفقاً للعينة

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

- **توزيع ستيودنت (توزيع t)**

عندما يكون تباين المجتمع غير معلوم وحجم العينة صغيراً (تكون العينة صغيره إذا كان حجمها أقل من 30) نستخدم فى هذه الحالة متغيراً يسمى متغير توزيع t وصيغته

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/_{\sqrt{n}}}$$

مثال (1): لتكن f (x) هى دالة كثافة احتمال توزيع زى الحديين معرفة كما يلى

$$f(x) = \begin{cases} \binom{7}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-x}, \ x = 0,1,2,.....,7 \\ 0 \end{cases}$$

فأوجد $M(t)$ (الدالة المولدة للعزوم)

$$M(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{t}\right)^{7}$$

ثم أوجد مدرتة $p(X=5), P(0 \leq x \leq 1)$

$$1)\ \therefore\ \mu = n\,p = \frac{7}{2}$$

$$2)\ \sigma^2 = n\,p\,(1-p) = \frac{7}{2}$$

$$3)\ p\,(0 \le X \le 1) = \sum_{x=0}^{1} f\,(x) = \binom{7}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-0} + \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-1}$$

$$= \frac{1}{128} + \frac{7}{128} = \frac{8}{128} = \frac{1}{16}$$

$$4)\ p_r\,(X = 5) = f\,(5) = \binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{128}$$

المراجع المستخدمة

1. Morse and Feshbach, “Methods of Theoretical Physics”, McGraw-Hil,1953
2. Mathews and Walker, “Mathematical Methods of Physics”, W.A. Benjamin, 1970
3. Arfken, “Mathematical Methods for Physicists”, Academic Press, 2005
4. Zwillinger,”Handbook of Differential Equations”, Academic Press, 1997
5. Ronald J. Tallarida , "Pocket Book of Integrals and Mathematical Formulas",Chapman and Hall/CRC, 2008.
6. F.W. Byron and R. Fuller, “Mathematics of Classical and Quantum Physics”, Dover Publications,1992
7. Yvonne Choquet-Bruhat, Cecile DeWitt-Morette, and Margaret Dillard-Bleick, “Analysis, manifolds, and physics”, North Holland, 2000
8. Jean Dieudonne, “A panorama of pure mathematics”, Academic Press, 1982
9. Robert Hermann, “Lie groups for physicists”, Benjamin-Cummings, 1966
10. George Mackey, “Unitary group representations in physics, probability, and number theory”, Benjamin-Cummings,1978
11. Charles Nash and S. Sen, “Topology and geometry for physicist”, Dover Publications,2011
12. B. Booss and D.D. Bleecker, “Topology and analysis: the Atiyah-Singer index formula and gauge-theoretic physics”, Springer, 1989
13. Bamberg and S. Sternberg, “A Course of Mathematics for Students of Physics”, Cambridge University Press, 1991
14. Bishop & Goldberg, “Tensor Analysis on Manifolds”, Dover Publications, 1980
15. Flanders, “Differential Forms with applications to the Physical Sciences”, Dover Publications ,1989
16. Dodson & Poston, “Tensor Geometry”, Springer, 2009
17. Von Westenholz, “Differential forms in Mathematical Physics”, Elsevier Science Ltd, 1980
18. Abraham, Marsden & Ratiu, “Manifolds, Tensor Analysis and Applications”, Springer, 1988
19. M. Nakahara, “Topology, Geometry and Physics”, CRC Press, 2003
20. Morandi, “The Role of Topology in Classical and Quantum Physics”, Springer, 1992
21. Singer, Thorpe, “Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry”, Springer, 1976
22. Courant and Hilbert, “Methods of Mathematical Physics”, Wiley, 1989